

Transitoires du premier ordre

-  Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
-  Difficulté technique et calculatoire ;
-  Exercice classique et/ou important.

Flasher ou cliquer
pour accéder
au corrigé



Applications de cours

Ces applications de cours sont des briques élémentaires des raisonnements à mener dans les exercices : les maîtriser est incontournable. Elles sont toutes traitées de manière exhaustive dans le cours.

E2.1 - En raisonnant par analyse dimensionnelle, établir l'expression du temps caractéristique τ d'un circuit RC ou RL, au choix de l'interrogateur. On supposera que τ peut a priori dépendre des composants et de l'amplitude E de l'échelon de tension imposé.

E2.2 - Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par l'intensité dans un circuit RC série soumis à un échelon de tension $0 \rightarrow E$ à l'instant initial. Représenter l'allure de la courbe $i(t)$.

E2.3 - Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par l'intensité dans un circuit RL série alimenté par un générateur de fém constante E après fermeture de l'interrupteur à l'instant initial. Représenter l'allure de la courbe $i(t)$.

E2.4 - La tension aux bornes du condensateur d'un circuit RC série soumis à un échelon de tension a pour expression

$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau} \right) .$$

Procéder au bilan énergétique : calculer de manière séparée le travail électrique total fourni par le générateur, l'énergie reçue par le condensateur et l'énergie dissipée dans la résistance. Calculer le rendement énergétique. Commenter.

E2.5 - Écrire un code Python permettant de résoudre par la méthode d'Euler explicite l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = \frac{e(t)}{\tau} .$$

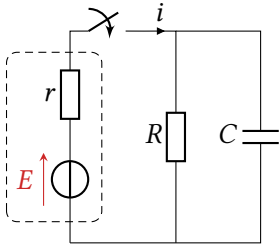
- Avant toute écriture de code, on commencera par établir la relation de récurrence pertinente.
- Les paramètres τ , Δt (pas de temps) et N (nombre de pas de temps) seront considérés comme des variables globales **déjà définies**, et on supposera disposer d'une fonction $e(t)$ **déjà définie** de manière adéquate.
- L'étudiant devra construire correctement (initialisation comprise) les listes τ et u .

Mise en équation de circuits

Exercice 1 : Transitoire d'un circuit RC parallèle



- Équation différentielle ;
- Recherche de condition initiale.



Considérons le circuit ci-contre, dans lequel un générateur est branché en parallèle d'une cellule RC à l'instant $t = 0$. Le générateur est décrit par son modèle de Thévenin, de fém E constante et de résistance interne r .

- 1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i débité par le générateur.
- 2 - Montrer que $i(0^+) = E/r$.
- 3 - En déduire l'expression de $i(t)$.

Correction — Raisonnons avec les notations de la figure 1.

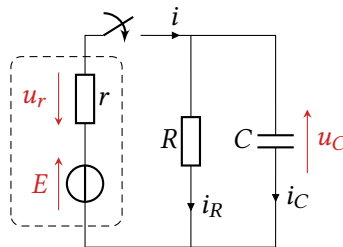


Figure 1 – Schéma du montage.

1 - D'après la loi des nœuds et les lois de comportement des dipôles,

$$i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{LN}}}{=} i_R + i_C \underset{\substack{\uparrow \\ \text{LC}}}{=} \frac{u_C}{R} + C \frac{du_C}{dt}$$

Question d'analyse 1 - Justifier que $i_R = u_C/R$, alors que u_C est la tension aux bornes du condensateur.

D'après la loi des mailles,

$$E = u_r + u_C \quad \text{donc} \quad u_C = E - u_r = E - ri$$

ce qui conduit à

$$i = \frac{E - ri}{R} - rC \frac{di}{dt}.$$

Question d'analyse 2 - Pourquoi la tension aux bornes de R n'apparaît-elle pas dans la loi des mailles ?

Question d'analyse 3 - Pourquoi la dérivée de E n'apparaît-elle pas ?

En réorganisant les termes, on obtient

$$rC \frac{di}{dt} + \left(1 + \frac{r}{R}\right) i = \frac{E}{R} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{1}{rC} \left(1 + \frac{r}{R}\right) i = \frac{E}{RrC}}.$$

On reconnaît ainsi une équation différentielle du premier ordre de temps caractéristique τ tel que

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{1}{rC} \left(1 + \frac{r}{R}\right)}.$$

Question d'analyse 4 - Pourquoi n'identifie-t-on pas $1/\tau = 1 + r/R$ dès la première étape ?

Question d'analyse 5 - Le terme $1/r + 1/R$ apparaît-il car les deux résistances sont montées en parallèles ?

2 - À l'instant $t = 0^-$, c'est-à-dire juste avant la fermeture de l'interrupteur, aucun courant ne parcourt le circuit donc

$$i(0^-) = i_R(0^-) = i_C(0^-) = 0.$$

La tension aux bornes des résistances est donc nulle à cet instant, et la tension $u_C(0^-)$ aux bornes du condensateur aussi puisqu'il est monté en parallèle de R .

Question d'analyse 6 - Pourquoi est-il faux d'en déduire $i(0^+) = 0$?

Considérons maintenant l'instant $t = 0^+$. D'après la loi des mailles,

$$u_C(0^+) = E - ri(0^+)$$

Puisque $u_C(0^+) = 0$, il vient directement

$$i(0^+) = \frac{E}{r}.$$

Question d'analyse 7 - Quel argument permet d'affirmer que $u_C(0^+) = 0$?

3 - Cherchons une solution particulière constante i_p :

$$0 + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) i_p = \frac{E}{rRC} \quad \text{d'où} \quad i_p = \frac{E}{r + R}.$$

Question d'analyse 8 - Pourquoi la solution particulière est-elle cherchée constante ?

Ainsi, les solutions de cette équation différentielle sont de la forme

$$i(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{E}{r + R}$$

À l'instant initial,

$$i(0^+) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{\frac{E}{r}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{A} + \frac{E}{r + R} \quad \text{d'où} \quad A = \frac{R}{r(r + R)} E.$$

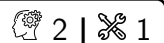
Question d'analyse 9 - Poser le calcul conduisant à l'expression de A .

Finalement,

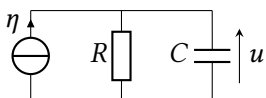
$$i(t) = \frac{R}{r(r + R)} E e^{-t/\tau} + \frac{E}{r + R} = \frac{E}{r + R} \left(1 + \frac{R}{r} e^{-t/\tau} \right).$$

Question d'analyse 10 - Proposer un test de vraisemblance du résultat autre que l'homogénéité.

Exercice 2 : Circuit RC soumis à un échelon de courant



- ▷ Équation différentielle ;
- ▷ Recherche de condition initiale.



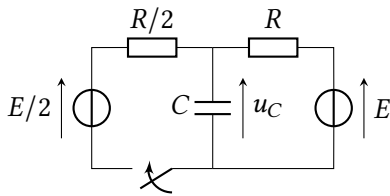
La source idéale de courant du circuit ci-contre impose un échelon,

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ I_0 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la tension u pour $t > 0$.

Exercice 3 : Condensateur alimenté par deux générateursoral CCINP MP |  2 |  2 | 

- ▷ Équation différentielle ;
- ▷ Recherche de condition initiale ;
- ▷ Puissance électrique.

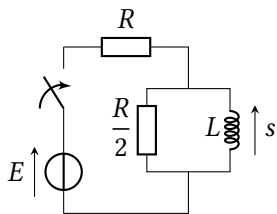


Dans le montage ci-contre, l'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$.

- 1 - Établir l'équation différentielle vérifiée par u_C .
- 2 - Résoudre cette équation et représenter la courbe de la solution.
- 3 - Déterminer le temps t_1 nécessaire pour que la valeur finale soit atteinte à 1 % près.
- 4 - Exprimer la puissance dissipée. Interpréter sa valeur finale.

Exercice 4 : Circuit RL à deux maillesoral Mines-Télécom PSI |  2 |  2 | 

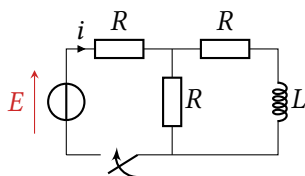
- ▷ Équation différentielle ;
- ▷ Recherche de condition initiale.



L'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$. Étudier l'évolution de $s(t)$ et tracer sa courbe.

Exercice 5 : Circuit RL à deux mailles 2 | 

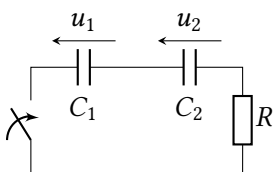
- ▷ Équation différentielle ;
- ▷ Recherche de condition initiale.



L'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$. Établir l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.

Exercice 6 : Décharge d'un condensateur dans un autre 3 | 

- ▷ Équation différentielle ;
- ▷ Bilan d'énergie.



Le condensateur C_1 du circuit ci-contre est initialement chargé sous une tension U_0 , alors que le condensateur C_2 est déchargé. L'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$. Pour alléger les calculs, on suppose $C_1 = C_2 = C$.

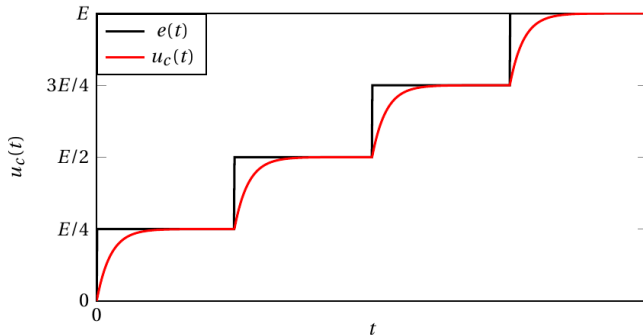
- 1 - Montrer qu'à tout instant $u_1 = u_2 + U_0$.
- 2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par u_1 pour $t \geq 0$.
- 3 - En déduire u_1 et u_2 . Représenter leur allure sur un même graphe.
- 4 - Déterminer l'énergie dissipée dans la résistance.

Cherchons les ennuis ☺

Exercice 7 : Charge par paliers d'un condensateur

 3 |  3


▷ Rendement énergétique.



Un condensateur est chargé via un circuit RC série jusqu'à une tension E par paliers successifs d'amplitude E/N . On suppose chaque palier suffisamment long pour que la charge soit complète.

Question : Calculer en fonction de N le rendement énergétique ρ de cette charge. Combien de paliers sont nécessaires pour avoir $\rho > 90\%$?

Exercice 8 : Bilan de puissance du régime libre d'un circuit RC série

 3 |  3


▷ Aspects énergétiques.

Considérons un circuit RC en régime libre, formé d'un condensateur de capacité C initialement chargé se déchargeant dans une résistance R . Aucun générateur n'alimente le circuit.

1 - Établir l'expression de l'énergie stockée dans un condensateur.

2 - **En raisonnant énergétiquement** pendant un petit intervalle de temps dt , montrer que l'énergie $\mathcal{E}_C$ stockée par le condensateur et la puissance $\mathcal{P}_J$ dissipée par effet Joule sont reliées par

$$\frac{d\mathcal{E}_C}{dt} = -\mathcal{P}_J.$$

3 - Écrire ce bilan sous la forme d'une équation différentielle portant sur la tension u aux bornes du condensateur. Montrer qu'elle est équivalente à celle obtenue par la loi des mailles.

4 - En déduire une équation différentielle portant sur l'énergie $\mathcal{E}_C$.

5 - Déduire de cette équation le temps τ_e caractéristique des échanges d'énergie dans le système. Retrouver ce résultat en partant directement de l'expression de $\mathcal{E}_C$ et de la solution $u(t)$ établie en cours pour ce circuit.