Régime libre des oscillateurs

Plan du cours

I Oscillateur harmonique **2**
- I.A Exemple : oscillateur masse-ressort horizontal . . . 2
- I.B Exemple : circuit LC série . . . 4
- I.C Résolution de l'équation différentielle . . . 4
- I.D Bilan énergétique . . . 7

II Équation différentielle d'un oscillateur amorti **8**
- II.A Exemple : circuit RLC série . . . 8
- II.B Exemple : oscillateur masse-ressort amorti . . . 9
- II.C Forme canonique . . . 9

III Résolution de l'équation différentielle **11**
- III.A Forme générale des solutions, polynôme caractéristique . . . 11
- III.B Fort amortissement : régime apériodique ou sur-amorti . . . 12
- III.C Faible amortissement : régime pseudo-périodique . . . 13
- III.D Cas limite intermédiaire : régime apériodique critique . . . 16
- III.E Un exemple de résolution complète . . . 17

(R) Résultat à connaître par cœur.
(M) Méthode à retenir, mais pas le résultat.
(D) Démonstration à savoir refaire.
(Q) Aspect qualitatif uniquement.

Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.

Ce chapitre aborde l'étude des systèmes oscillants sous l'angle de leurs oscillations libres, c'est-à-dire en réponse à un échelon, autrement dit à une perturbation passant d'une valeur constante à une autre. Malgré des exemples un peu académiques, les notions étudiées ont de multiples applications et permettent de comprendre de très nombreux phénomènes ou dispostifs : propagation du son dans les solides, vibrations des molécules et techniques de spectroscopies, vibrations d'une « poutre » (règle, etc.) fixée à une extrémité, amortisseur de voiture ou de vélo, etc.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

I - Oscillateur harmonique

Un **oscillateur harmonique** est un oscillateur « parfait », dont les oscillations ne s'amortissent jamais et perdurent indéfiniment.

I.A - Exemple : oscillateur masse-ressort horizontal

I.A.1 - Force exercée par un ressort

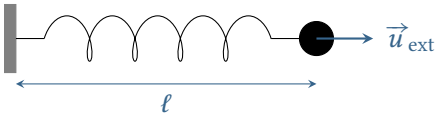
Qu'il soit étendu ou comprimé, les forces exercées par ressort ont toujours tendance à le ramener à sa longueur « naturelle », appelée **longueur à vide** ℓ_0. La (constante de) **raideur** k du ressort quantifie la difficulté à l'étirer ou le comprimer.

R

Un objet accroché à l'extrémité d'un ressort idéal subit la **force de rappel élastique**

$$\vec{F}_r = -k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_{ext}$$

où k est la **constante de raideur**,
$\Delta\ell = \ell - \ell_0$ l'**allongement** du ressort avec ℓ sa longueur instantanée et ℓ_0 sa longueur à vide
et $\vec{u}_{ext}$ un vecteur unitaire tangent au ressort, dirigé vers l'extérieur du ressort.



Unité de la constante de raideur k :

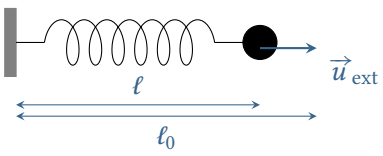
M

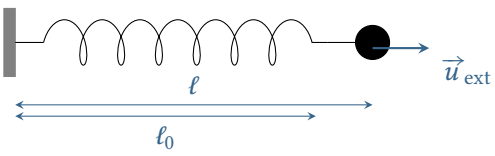
Espace 1

Q

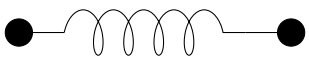
Attention ! Cette loi de force est plus subtile qu'il n'y paraît !

- le sens de la force est inconnu tant que l'on ne sait pas si le ressort est comprimé ou étendu ;
- il n'est donc pas possible de dessiner la force exercée par un ressort sans faire d'hypothèse sur le signe de l'allongement, autrement dit sans indiquer ℓ_0 sur le schéma ;





- le sens du vecteur $\vec{u}_{ext}$ dépend non seulement de l'orientation du ressort mais aussi de la position de l'objet.



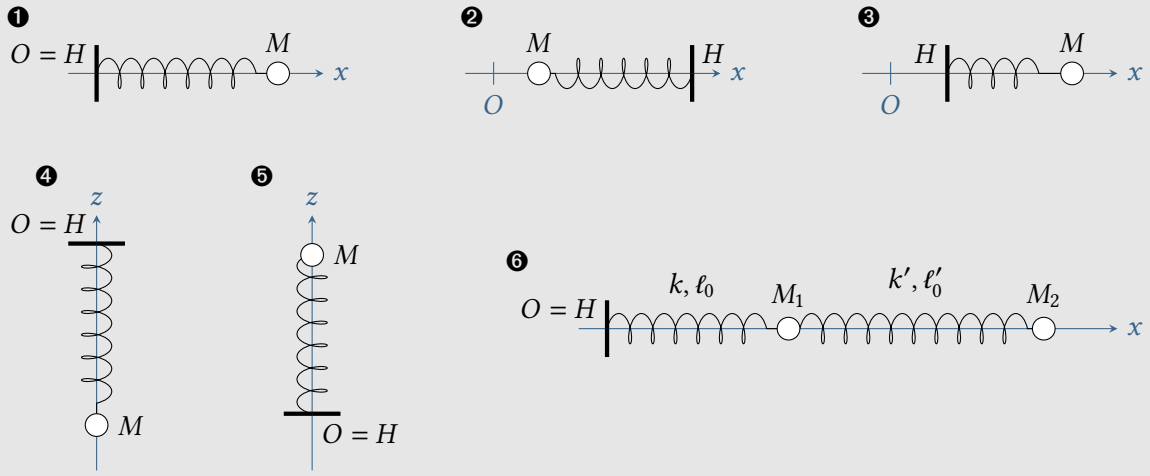
BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Application 1 : Forces exercées par des ressorts

M

Exprimer la force exercée sur chaque point M, en fonction notamment de la coordonnée x_H ou z_H du point H auquel le ressort est attaché.



I.A.2 - Période des oscillations d'un système masse-ressort horizontal

Avant de se lancer dans les équations différentielles, commençons par déterminer par analyse dimensionnelle la façon dont la période des oscillations d'un système masse-ressort évolue.

Application 2 : Période des oscillations

M

Par analyse dimensionnelle, estimer à un facteur numérique près la période T_0 des oscillations d'un système masse-ressort. Comment faut-il modifier la masse pour que la période des oscillations double ?

I.A.3 - Équation du mouvement

Application 3 : Équation du mouvement d'un système masse-ressort

M

Établir l'équation du mouvement d'un système masse-ressort horizontal évoluant le long d'un axe (Ox), en négligeant tous les frottements, et l'écrire sous forme canonique. Le ressort est fixé au point origine O.

R

La forme canonique d'une équation différentielle d'oscillateur harmonique comme celle ci-dessus portant sur une grandeur de sortie s en réponse à une entrée e (forçage) s'écrit

pas de dérivée première

préfacteur 1 devant la dérivée seconde

pulsation propre

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 s = \text{des choses qui dépendent de } e$$

membre de gauche : ce qui implique la fonction cherchée

membre de droite ou **second membre** : le reste = ce qui implique le forçage

Cette équation différentielle est dite

- **linéaire** : si un forçage $e_1(t)$ donne une sortie $s_1(t)$, un forçage $e_2(t)$ une sortie $s_2(t)$, alors un forçage $\lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)$ conduit à une sortie $\lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$;
- **du second ordre** car la dérivée d'ordre le plus élevé est une dérivée seconde ;
- **à coefficients constants** car ω_0 ne dépend pas du temps.

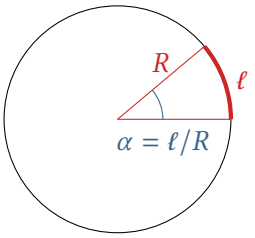
BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Dimensionnellement :

Espace 2

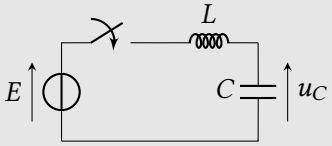
... mais nous comprendrons par la suite que la bonne unité est plutôt $[\omega_0] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

> ***Remarque :*** *Par définition, un angle en radian est défini comme le rapport entre la longueur ℓ de l'arc de cercle intercepté et le rayon R du cercle. Bien qu'ayant une* unité*, un angle n'a donc pas de* dimension.
>
> 
>
>
> *Un pourcentage est un autre exemple que vous connaissez bien de grandeur ayant une unité mais pas de dimension. On peut également citer les concentrations (p.ex. de polluants ou de GES dans l'atmosphère) exprimées en ppm « partie par million », qui comptent le nombre de molécule de l'espèce cherchée par million de molécule d'air.*

I.B - Exemple : circuit LC série

M

Application 4 : Équation différentielle d'un circuit LC



Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C après la fermeture de l'interrupteur à $t = 0$. L'écrire sous forme canonique et identifier la pulsation propre du circuit.

I.C - Résolution de l'équation différentielle

I.C.1 - Forme des solutions

R

Comme pour toute équation différentielle linéaire, une solution quelconque s'écrit comme la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière.

Solution particulière : Pour trouver efficacement une solution particulière x_P, on la cherche de la même forme que le forçage (c'est-à-dire que le second membre), en l'occurence constante.

Solution homogène : L'équation homogène associée est celle dans laquelle le second membre est nul,

$$\frac{\text{d}^2x}{\text{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0\,.$$

R

Les solutions de l'équation homogène d'un oscillateur harmonique s'écrivent

$$x_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \qquad \text{avec} \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^2\,.$$

> ***Remarque :*** *Le fait que la combinaison « $\omega_0 t$ » apparaisse dans un cosinus, fonction qui s'applique à un angle, justifie d'utiliser $[\omega_0] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ plutôt que simplement s^{-1}.*

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

➽ Pour approfondir :

Démontrons ce résultat en utilisant le polynôme caractéristique, qui sera introduit au paragraphe III.A. Rappelons qu'il s'agit d'un polynôme de variable notée r, qui s'obtient en identifiant la dérivée n-ième à r^n. Pour l'oscillateur harmonique, et en se souvenant que $r^0 = 1$,

$$r^2 + \omega_0^2\, r^0 = 0 \qquad \text{soit} \qquad r^2 = -\omega_0^2 \qquad \text{d'où} \qquad r_\pm = \pm \mathrm{i}\omega_0\,.$$

On en déduit la forme générale des solutions homogènes :

$$x_\mathrm{H}(t) = a\,\mathrm{e}^{r_+ t} + b\,\mathrm{e}^{r_- t} = a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \qquad \text{avec} \qquad (a,b) \in \mathbb{C}^2\,.$$

La position $x(t)$ étant évidemment à valeurs réelles, les constantes a et b sont conjuguées : cette écriture n'est donc pas la plus pratique ! Poser $a = (A - \mathrm{i}B)/2$, et donc $b = (A + \mathrm{i}B)/2$, donne une expression plus aisément utilisable,

$$\begin{aligned} x_\mathrm{H}(t) &= \frac{A - \mathrm{i}B}{2}\Big(\cos(\omega_0 t) + \mathrm{i}\sin(\omega_0 t)\Big) + \frac{A + \mathrm{i}B}{2}\Big(\cos(\omega_0 t) - \mathrm{i}\sin(\omega_0 t)\Big) \\ &= 2 \times \frac{A}{2}\cos(\omega_0 t) + 2 \times \frac{B}{2}\sin(\omega_0 t) \\ x_\mathrm{H}(t) &= A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \qquad \text{avec} \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2\,, \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat annoncé. ■

Solution complète : déterminer *la* solution « physique » parmi l'ensemble des solutions mathématiquement possibles demande de déterminer les constantes A et B grâce à deux conditions initiales, portant sur la fonction cherchée et sa dérivée.

I.C.2 - Exemple de résolution

Application 5 : Résolution complète pour l'oscillateur mécanique M

L'équation différentielle du mouvement d'un système masse-ressort s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \ell_0\,.$$

1 - La résoudre en supposant que la masse est lâchée à l'instant initial d'une position X_0 avec une vitesse initiale V_0.

2 - Déterminer la période propre T_0 des oscillations et la fréquence propre f_0. Comparer au résultat prévu par analyse dimensionnelle.

⇉ Généralisation :



La pulsation propre d'un oscillateur harmonique renseigne sur la période de ses oscillations libres, R

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

I.C.3 - Amplitude et phase initiale



Les solutions de l'équation d'un oscillateur harmonique en régime libre peuvent également s'écrire R

$$x(t) = X_\mathrm{m}\cos(\omega_0 t + \varphi) + \mathrm{cte}\,,$$

où X_m est l'**amplitude** des oscillations et φ la **phase initiale**.

On montre que cette forme est équivalente à la précédente en développant le cosinus,

$$X_\mathrm{m}\cos(\omega_0 t + \varphi) = \underbrace{X_\mathrm{m}\cos\varphi}_{=A}\cos(\omega_0 t) \underbrace{- X_\mathrm{m}\sin\varphi}_{=B}\sin(\omega_0 t)$$

... et il est bien sûr possible d'effectuer le calcul dans l'autre sens, en posant

$$X_\mathrm{m} = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \text{et} \qquad \tan\varphi = -\frac{B}{A}\,.$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Cependant, cette seconde écriture est moins pratique pour utiliser les conditions initiales.

Signification physique :

- l'amplitude renseigne sur l'écart entre les valeurs extrêmales de $x(t)$:

Q

Espace 3

- la phase initiale renseigne sur les instants auxquels la valeur maximale est atteinte :

Q

Espace 4

- Signe de φ : la vitesse initiale s'écrit

Q

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t=0) = -X_\mathrm{m}\omega_0 \sin\varphi\,,$$

donc si $x(t)$ est croissante à l'instant initial c'est que $\varphi < 0$.

I.C.4 - Allure des solutions

Q

Voir figure 1.

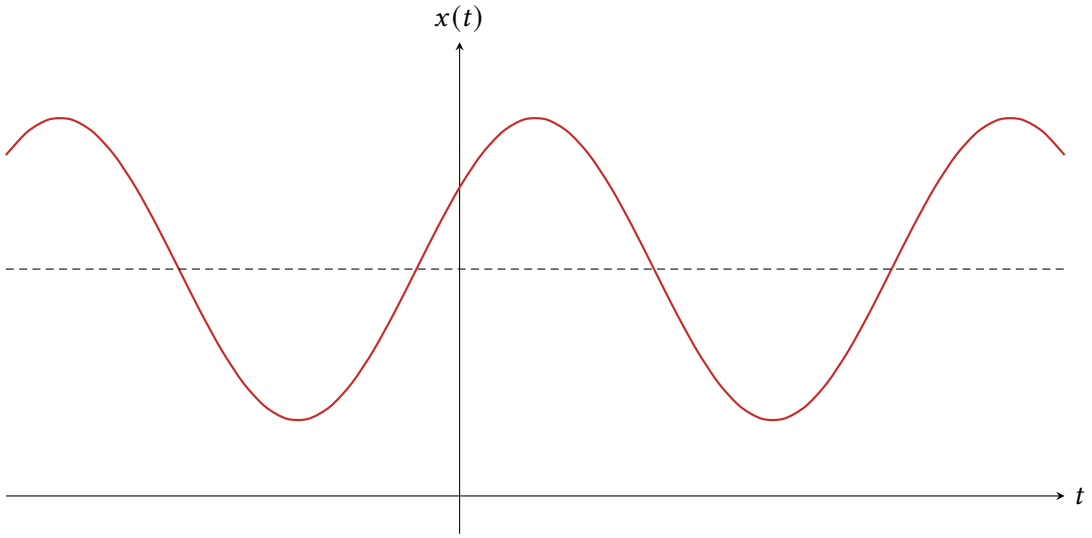
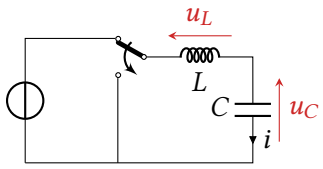


Figure 1 – Allure des oscillations harmoniques.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

I.D - Bilan énergétique



Exemple : considérons à titre d'exemple un circuit LC série, découplé du générateur pour $t \geq 0$ grâce à un interrupteur à trois positions.

Bilan de puissance :

Espace 5

⇉ Généralisation :

Les oscillations harmoniques traduisent une conservation de l'énergie totale,
même si l'énergie change de forme périodiquement (ici entre forme électrique et magnétique).

L'énergie mécanique d'un oscillateur masse-ressort se conserve également, se transformant périodiquement d'énergie cinétique en énergie potentielle stockée dans le ressort : nous en reparlerons dans quelques semaines.

➽ Pour approfondir : Le calcul aurait été un peu différent si nous avions procédé au bilan en présence du générateur. Il s'écrirait alors

$$Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Cu_C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = Ei \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2\right) = Ei\,.$$

L'énergie électromagnétique totale stockée dans la bobine et le condensateur n'est alors plus constante. Néanmoins, on peut établir l'expression de i en résolvant une équation différentielle (il faudrait alors préciser les conditions initiales), et montrer qu'il s'agit toujours d'une fonction de moyenne nulle, quelles que soient ces conditions initiales. Ainsi, la puissance Ei fournie au circuit par le générateur est de moyenne nulle également. Cela signifie que le générateur fournit et prélève périodiquement de l'énergie au circuit, mais que le bilan global de ces échanges est neutre. Autrement dit, l'énergie électromagnétique du circuit LC reste conservée, non plus à tout instant, mais seulement en moyenne. ■

BY-NC-SA

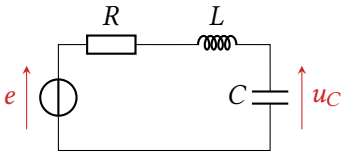
© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

II - Équation différentielle d'un oscillateur amorti

II.A - Exemple : circuit RLC série

II.A.1 - Étude expérimentale

Q



Étudions la réponse d'un circuit RLC série en réponse à un échelon de tension $0 \longrightarrow E$ imposé à l'instant $t = 0$.

- Si la résistance est suffisamment petite, le régime transitoire présente des oscillations amorties : il est dit **pseudo-périodique** ;
- Si la résistance est suffisamment grande, le régime transitoire ne présente plus d'oscillations : il est dit **apériodique** ou **sur-amorti** ;
- La durée du régime transitoire est minimale pour une valeur de résistance proche de la transition entre les deux régimes.

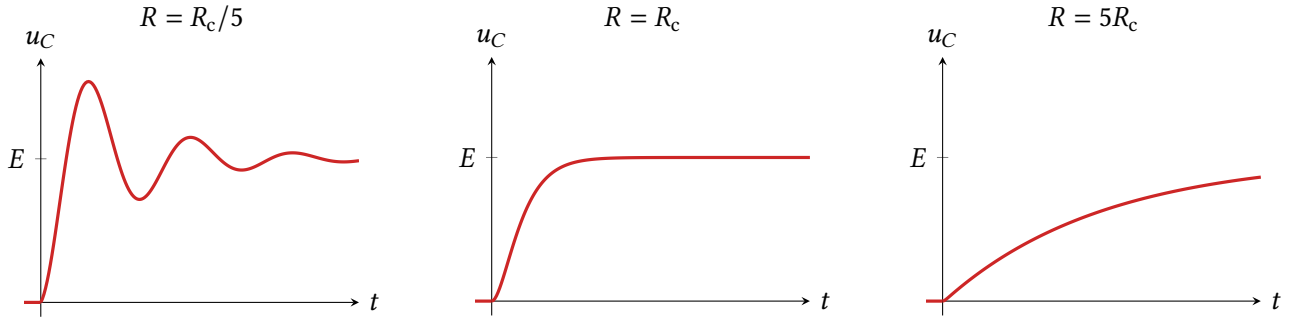


Figure 2 – Régimes transitoires d'un circuit RLC.

II.A.2 - Analyse dimensionnelle

L'analyse du régime pseudo-périodique montre que le système présente *deux* temps caractéristiques : la période des oscillations et le temps caractéristique sur lequel leur amplitude s'amortit.

⇝ l'analyse dimensionnelle est impuissante dans cette situation : le système issu de l'équation aux dimensions est sous-déterminé, c'est-à-dire qu'il n'admet pas de solution unique.

R

L'analyse dimensionnelle n'apporte plus aucune information
dès lors que plusieurs paramètres caractéristiques de même dimension interviennent dans le problème.

➽ **Pour approfondir :** Procédons à l'analyse dimensionnelle du système, en cherchant un temps caractéristique

$$\tau = R^n C^p L^q \,.$$

L'équation aux dimensions donne

$$\mathrm{s} = (\mathrm{V}\cdot\mathrm{A}^{-1})^n\,(\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{V}^{-1})^p\,(\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{A}^{-1})^q \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} 1 = p+q \\ 0 = n-p+q \\ 0 = -n+p-q \end{cases}$$

Les deux dernières lignes sont équivalentes : il manque une équation pour que le système admette une unique solution. Il impose néanmoins $q = 1-p$ et $n = p-q = 2p-1$, ce qui montre que toute combinaison de la forme $R^{2p-1}C^pL^{1-p}$ est homogène à un temps. Notons qu'on y retrouve les classiques RC ($p=1$), L/R ($p=0$) et $\sqrt{LC}$ ($p=1/2$). ■

II.A.3 - Mise en équation

M

Application 6 : Équation différentielle du circuit RLC série

Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C pour $t > 0$, c'est-à-dire dans l'état haut de l'échelon de tension.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

II.B - Exemple : oscillateur masse-ressort amorti

Application 7 : Équation du mouvement d'un système masse-ressort vertical amorti M

Établir l'équation du mouvement d'un système masse-ressort **vertical** (pour changer !), en prenant en compte une force de frottement linéaire de coefficient λ. On considérera un axe (Oz) vertical vers le bas, le ressort étant fixé au point origine O.

II.C - Forme canonique

R

La forme canonique d'une équation différentielle d'oscillateur amorti comme celle ci-dessus portant sur une grandeur de sortie s en réponse à une entrée e (forçage) s'écrit

préfacteur 1 devant la dérivée seconde — **facteur de qualité** — **pulsation propre**

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \text{des choses qui dépendent de } e$$

membre de gauche : ce qui implique la fonction cherchée

membre de droite ou **second membre** : le reste = ce qui implique le forçage

Il s'agit de nouveau d'une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants.

- Dimensionnellement :

Q

Espace 6

- Il aurait aussi été possible d'identifier deux temps caractéristiques dans la forme canonique, l'un associé à la dérivée première et l'autre à la fonction. Cependant, il est raisonnablement intuitif que ce qui compte pour régir le comportement du système est de les comparer l'un à l'autre, donc un analogue du rapport sans dimension τ/τ' : c'est exactement ce que fait le facteur de qualité.
- Il existe une écriture alternative de la forme canonique que nous utiliserons peu en physique, mais que vous rencontrerez probablement en SI :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + 2\xi\omega_0\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \ldots$$

où $\xi = 1/2Q$ est appelé **taux d'amortissement**.
- Pour un système stable, c'est-à-dire tous les systèmes que nous rencontrerons cette année, le facteur de qualité (et le taux d'amortissement) est toujours positif : plus à ce sujet l'année prochaine.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

M

Application 8 : Forme canonique des équations d'oscillateurs amortis

Les deux exemples précédents ont conduit aux équations différentielles

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E \qquad \text{et} \qquad m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \lambda\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + kz = k\ell_0 + mg\,.$$

Les écrire sous forme canonique en identifiant ω_0 et Q.

Pour un circuit RLC série,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,.$$

Premières interprétations du facteur de qualité :

▹ *lien avec l'oscillateur harmonique :*

Q

Espace 7

▹ *lien avec les différents types de régime :*

Q

Espace 8

Q

▹ *lien avec les phénomènes dissipatifs :* les oscillations harmoniques sont associées à la conservation de l'énergie totale du système, or ici une fraction de cette énergie est dissipée à chaque oscillation par effet Joule ou par les frottements.

→ facteur de qualité élevé = peu de dissipation = plusieurs oscillations ont lieu avant que toute l'énergie initiale ne soit dissipée ;

→ facteur de qualité faible = forte dissipation = aucune oscillation ne peut avoir lieu avant dissipation totale de l'énergie initiale.

R

Qualitativement, le facteur de qualité renseigne sur la qualité de l'oscillateur :
un oscillateur de « bonne qualité » présente peu de dissipation et de nombreuses oscillations,
un oscillateur de « mauvaise qualité » présente une forte dissipation et n'oscille pas.

Un oscillateur harmonique est un oscillateur parfait, de qualité infinie.

> ***Remarque :*** *Attention à ne pas généraliser abusivement : un mauvais* oscillateur *n'est pas forcément un mauvais* système. *Par exemple, un amortisseur de voiture s'apparente à un système masse-ressort amorti ... mais sa finalité n'est pas du tout d'osciller, et on souhaite au contraire qu'il retrouve le plus vite possible sa position d'équilibre, sans aucune oscillation.*

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

III - Résolution de l'équation différentielle

Pour fixer des notations, on s'intéresse à l'échelon montant $0 \longrightarrow E$ imposé à un circuit RLC, mais la méthode se décline de façon exactement similaire en mécanique. L'équation différentielle s'écrit pour $t > 0$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 E\,.$$

III.A - Forme générale des solutions, polynôme caractéristique

Comme pour toute équation différentielle linéaire, une solution quelconque s'écrit comme la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière.

III.A.1 - Solution particulière

Pour trouver efficacement une solution particulière u_P, on la cherche de la même forme que le forçage (c'est-à-dire que le second membre), en l'occurence constante.

⇝ ici :

III.A.2 - Solution homogène

L'équation homogène associée est celle dans laquelle le second membre est nul,

$$\frac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{H}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{H}}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u_\mathrm{H} = 0$$

Résoudre cette équation demande d'identifier les racines de son **polynôme caractéristique**.

➽ **Pour approfondir :** Compte tenu des « bonnes propriétés » de l'exponentielle vis-à-vis de la dérivation, on cherche à quelle(s) condition(s) une fonction de la forme $t \mapsto A\,\mathrm{e}^{rt}$, A et r deux constantes, est solution de l'équation homogène. En injectant dans l'équation, on trouve

$$r^2 \cancel{A\mathrm{e}^{rt}} + \frac{\omega_0}{Q} r \cancel{A\mathrm{e}^{rt}} + {\omega_0}^2 \cancel{A\mathrm{e}^{rt}} = 0\,.$$

Ainsi, la constante r doit être racine du **polynôme caractéristique**,

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + {\omega_0}^2 = 0$$

L'écriture du polynôme caractéristique peut (et doit !) être donnée sans démonstration dans une copie de physique. Si son discriminant est non-nul, le polynôme caractéristique admet deux racines $r_\pm$ et toute solution de l'équation homogène s'écrit

$$u_H(t) = A\,\mathrm{e}^{r_+ t} + B\,\mathrm{e}^{r_- t} \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2\,.$$

C'est un peu plus subtil si le discriminant est nul : dans ce cas, toute solution homogène s'écrit

$$u_H(t) = (At + B)\,\mathrm{e}^{rt} \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2\,.$$

On peut comprendre la nécessité d'avoir deux constantes dans la solution homogène par le fait qu'il s'agisse d'une équation du second ordre, qu'il faut donc « intégrer deux fois ». Vous en direz davantage à ce sujet en cours de maths. ■

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Espace 9

R

La nature des solutions homogènes (et donc la nature du régime transitoire)
dépend de la valeur du facteur de qualité $Q \gtrless 1/2$.

III.B - Fort amortissement : régime apériodique ou sur-amorti

R

La régime **apériodique** ou **sur-amorti** s'obtient pour un fort amortissement
c'est-à-dire un discriminant positif, ou encore un facteur de qualité faible $Q < 1/2$.

M **Racines du polynôme caractéristique et solution homogène :**

Espace 10

R

En régime apériodique, les solutions de l'équation homogène prennent la forme

$$u_H(t) = A\,e^{r_+ t} + B\,e^{r_- t},$$

où les constantes A et B se déterminent sur la solution complète
à partir de deux conditions initiales.

> ***Remarque :*** *les deux racines r_+ et r_- étant négatives, la solution homogène tend bien vers 0 aux temps longs, conformément à ce que l'on attend d'un régime transitoire.*

Allures possibles : voir figure 3.

Q

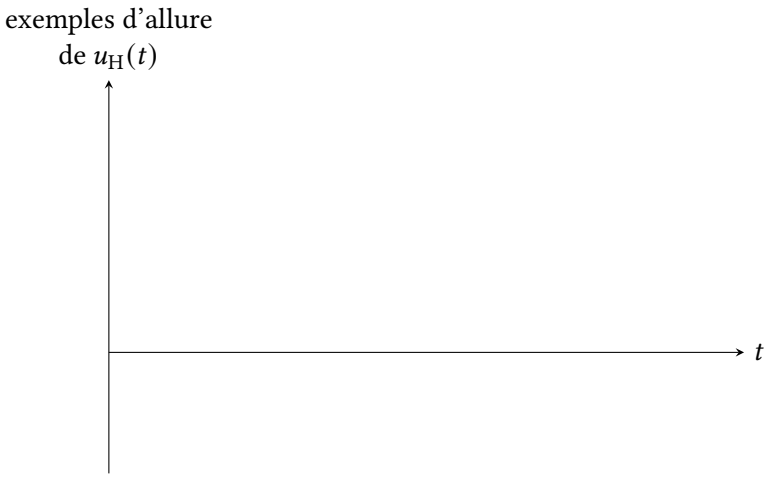


Figure 3 – Exemples d'allures de la solution homogène en régime apériodique. Seule la solution homogène est représentée, qui tend vers zéro aux temps longs.

Attention ! Absence d'oscillation ne veut pas dire fonction monotone, tout dépend des conditions initiales ! Lorsque u_H n'est pas monotone et sort de l'intervalle défini par ses valeurs initiale et finale, on dit qu'elle présente un **dépassement** (cf. cours de SI).

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Durée du régime transitoire : comparaison des temps caractéristiques d'évolution des deux exponentielles.

M

Espace 11

Attention ! S'agissant d'une *somme* de deux exponentielles, la valeur de τ_+ ne peut être estimée ni par la tangente initiale, ni par le temps de réponse à 63 %.

En régime apériodique, le transitoire est d'autant plus long que le facteur de qualité est faible.

Q

Interprétation : cela se comprend très bien en mécanique, où un faible facteur de qualité est associé à des frottements élevés : une masse évoluant dans un fluide très visqueux mettra bien plus de temps à atteindre sa position d'équilibre que si elle évolue dans un fluide peu visqueux.

III.C - Faible amortissement : régime pseudo-périodique

La régime **pseudo-périodique** s'obtient pour un faible amortissement,
c'est-à-dire un discriminant négatif, ou encore un facteur de qualité élevé $Q > 1/2$.

R

Racines du polynôme caractéristique et solution homogène :

M

Espace 12

Dans cette écriture, τ est le **temps caractéristique d'amortissement** et ω_p la **pseudo-pulsation**.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

On en déduit la forme générale des solutions homogènes :

$$u_\mathrm{H}(t) = a\,\mathrm{e}^{r_+ t} + b\,\mathrm{e}^{r_- t} = \left(a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_\mathrm{p} t} + b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\mathrm{p} t}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad (a,b) \in \mathbb{C}^2\,.$$

La tension u étant forcément à valeurs réelles, on trouve comme pour l'oscillateur harmonique que les constantes a et b sont conjuguées. Il est donc préférable de poser $a = (A - \mathrm{i}B)/2$ et d'adopter l'écriture suivante [1] :

En régime pseudo-périodique, les solutions de l'équation homogène prennent la forme

$$u_\mathrm{H}(t) = \left(A\cos(\omega_\mathrm{p} t) + B\sin(\omega_\mathrm{p} t)\right)\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad r_\pm = -\frac{1}{\tau} \pm \mathrm{i}\omega_\mathrm{p}$$

où les constantes A et B se déterminent sur la solution complète à partir de deux conditions initiales.

Interprétation physique de ω_p et τ : comme pour l'oscillateur harmonique, une écriture en amplitude et phase est possible également,

Espace 13

Q Interprétation :

Espace 14

⇝ origine des termes *pseudo*-périodique et *pseudo*-pulsation.

Allure possible : voir figure 4.

Q

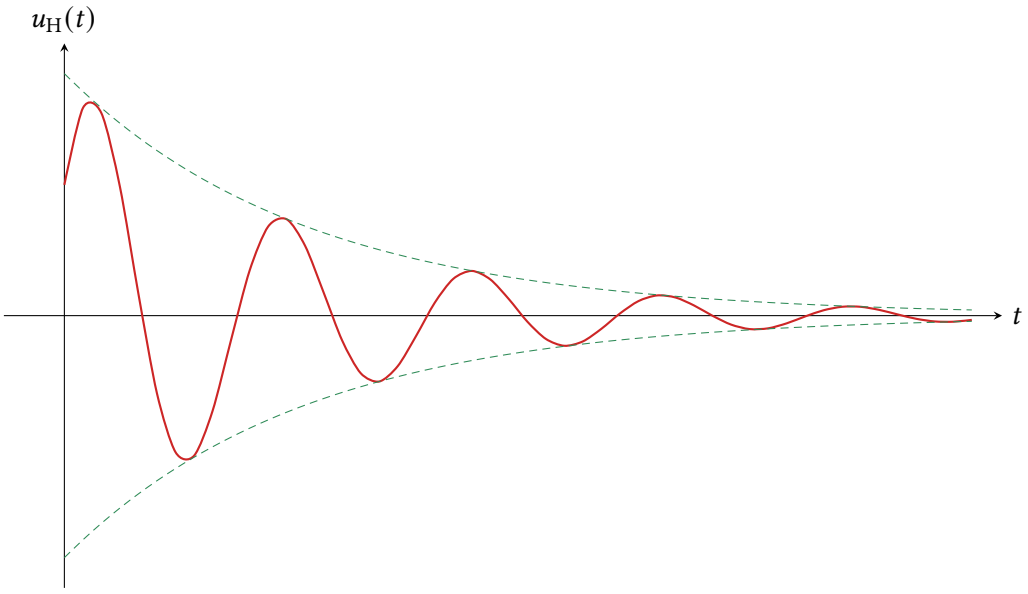


Figure 4 – Exemple d'allure de la solution homogène en régime pseudo-périodique.

1. L'équivalence entre les deux écritures est démontrée pour l'oscillateur harmonique dans l'approfondissement page 5.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Comparaison entre pseudo-période et période propre :

Espace 15

> ***Remarque :*** *dès que le facteur de qualité est « un peu » élevé, approximer $\omega_p \simeq \omega_0$ devient vite pertinent. Par exemple, pour $Q = 2$, $\omega_p = 0{,}968\,\omega_0$.*

Durée du régime transitoire :

Espace 16

> ***Remarque :*** *τ ne représente que* l'ordre de grandeur *de la durée du transitoire. Pour être plus précis, il faudrait s'appuyer p.ex. sur la notion de temps de réponse introduite dans le cours sur les transitoires du premier ordre, qui se généralise très bien ici à condition de considérer l'enveloppe exponentielle, c'est-à-dire l'amplitude des oscillations. Ainsi, le temps de réponse à 95 % est égal à 3τ et le temps de réponse à 99 % à 5τ.*

En régime pseudo-périodique, le transitoire est d'autant plus long que le facteur de qualité est élevé.

Nombre d'oscillations pendant le transitoire : raisonnons par exemple sur le temps de réponse à 95 % de l'amplitude instantanée des oscillations, $t_{95} = 3\tau$.

Espace 17

Le facteur de qualité donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations pendant un transitoire pseudo-périodique.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

III.D - Cas limite intermédiaire : régime apériodique critique

R

Le régime **apériodique critique** correspond à la limite entre les régimes apériodique et pseudo-périodique.

Il s'obtient pour un discriminant nul, c'est-à-dire un facteur de qualité $Q = 1/2$.

Il s'agit d'un cas limite théorique, inatteignable en pratique avec des composants physiques réels.

M **Racine du polynôme caractéristique et solution homogène :**

Espace 18

R

En régime apériodique critique, les solutions de l'équation homogène prennent la forme

$$u_H(t) = (At + B)\,e^{rt} = (At + B)\,e^{-\omega_0 t}$$

où les constantes A et B se déterminent sur la solution complète à partir de deux conditions initiales.

Allures possibles : très proches d'un régime apériodique.

Durée du régime transitoire :

Espace 19

R

C'est en régime apériodique critique de la durée du régime transitoire est la plus courte à pulsation propre ω_0 fixée.

> ***Remarque :*** *Ce critère doit en réalité être précisé : $Q = 1/2$ donne le transitoire le plus court en interdisant tout dépassement, c'est-à-dire en imposant que la tension reste toujours incluse dans l'intervalle défini par sa valeur initiale et sa valeur asymptotique (= solution particulière). En revanche, si un dépassement est toléré, alors c'est pour $Q = 0{,}69$ que le transitoire devient le plus rapide au sens du temps de réponse à 5 %. Ces précisions peuvent avoir de l'importance dans des systèmes industriels réels, mais pour un exercice « académique », on peut se contenter de retenir que c'est en régime apériodique critique que le transitoire est le plus rapide.*

➽ **Pour approfondir :** Montrons-le sur les durées caractéristiques. En régime pseudo-périodique, $Q > 1/2$ et

$$\tau_{\text{p.pér}} = \frac{2Q}{\omega_0} > \frac{1}{\omega_0} = \tau_{\text{cr}}\,.$$

En régime apériodique, $Q < 1/2$, et nous avons montré que

$$\tau_{\text{apér}} = \frac{2Q}{\omega_0}\frac{1}{1-\sqrt{1-4Q^2}} = \frac{1}{\omega_0}\frac{1}{\frac{1}{2Q}-\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}}$$

Montrons que $\tau_{\text{apér}} > \tau_{\text{cr}}$, c'est-à-dire

$$\forall Q < 1/2, \quad \frac{1}{\frac{1}{2Q}-\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}} > 1\,.$$

Posons $x = 1/2Q > 1$ et montrons que $x - \sqrt{x^2-1} < 1$. Le plus simple est de montrer que la fonction $f : x \mapsto 1 - x + \sqrt{x^2-1}$ est positive pour tout $x > 1$. Comme

$$\forall x > 1, f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 1 > 0\,,$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

alors la fonction est strictement croissante sur $]1, +\infty[$, et

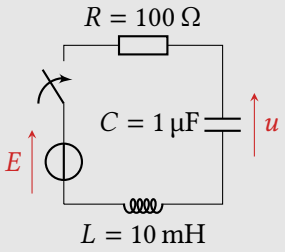
$$\forall x > 1, f(x) > f(1) = 0,$$

ce qui prouve le résultat annoncé. Ainsi, nous avons montré que la durée caractéristique du régime transitoire est minimale en régime apériodique critique. ■

III.E - Un exemple de résolution complète

Application 9 : Un RLC de A à Z

M



On considère le circuit ci-contre, où l'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$, le condensateur étant initialement déchargé. Établir la loi d'évolution $u(t)$ en fonction de E et ω_0 et la représenter. On remplacera Q par sa valeur numérique.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr