

Lois de Newton

Plan du cours

I	Décrire le mouvement d'un point	2
I.A	Du solide au point matériel	2
I.B	Référentiel et repère de temps.	3
I.C	Vecteurs cinématiques.	5
II	Actions mécaniques	8
II.A	Modélisation d'une action mécanique par une force	8
II.B	Principe des actions réciproques	9
II.C	Classification des forces	9
II.D	Effet des actions mécaniques sur le mouvement : principe fondamental de la dynamique	11
III	Exemple : chute libre sans frottement	11
III.A	Poids et force de gravitation	11
III.B	Équation du mouvement et lois horaires	12
III.C	Trajectoire	13
IV	Exemple : chute verticale dans un fluide	13
IV.A	Forces exercées par un fluide sur un solide	13
IV.B	Équation du mouvement	15
IV.C	Grandeurs caractéristiques et adimensionnalisation	15
IV.D	Résolution numérique	17

- | | |
|--|---|
| (R) Résultat à connaître par cœur. | (M) Méthode à retenir, mais pas le résultat. |
| (D) Démonstration à savoir refaire. | (Q) Aspect qualitatif uniquement. |

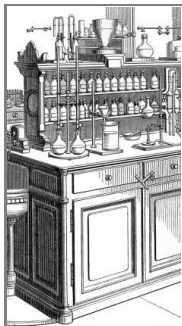
Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.



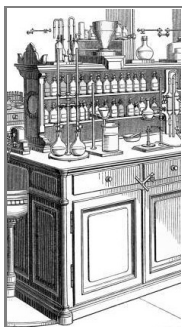
La **mécanique** est le domaine de la physique qui s'intéresse aux mouvements et à leurs causes.

On distingue la **cinématique**, qui donne les outils nécessaires à la description du mouvement, et la **dynamique**, qui relie le mouvement à ses causes, les actions mécaniques. L'**énergétique** donne un point de vue complémentaire en interprétant le mouvement du système à partir de ses échanges d'énergie avec l'extérieur.

L'objectif de ce premier chapitre est de revoir plein de choses que vous connaissez déjà, éventuellement en les formalisant un peu plus ou un peu mieux.



***Un peu d'histoire :** La mécanique trouve ses origines dans l'Antiquité avec Aristote, qui pense que le mouvement nécessite une cause permanente, et Archimède, qui comprend le principe du levier et de la poulie. Au XVII^e siècle, Galilée rompt avec cette vision en introduisant la notion d'inertie et en étudiant la chute des corps. Newton formalise ces concepts, déduisant d'observations les trois lois qui portent aujourd'hui son nom et celle de la gravitation universelle, fondations de la mécanique classique. Au XIX^e siècle, Lagrange et Hamilton développent des formulations analytiques plus mathématisées et plus générales. Enfin, au XX^e siècle, les théories de la mécanique quantique et la relativité élargissent ce cadre aux échelles microscopiques et cosmologiques.*



***Un peu d'histoire :** Isaac Newton, né en 1643 en Angleterre, est l'un des plus grands scientifiques de l'histoire. Mathématicien, physicien et astronome, il révolutionne la science par ses recherches à la fois théoriques et expérimentales, élaborant des modèles mathématiques pour décrire la nature et les confrontant à des expériences. Son ouvrage majeur, Principia Mathematica (1687), jette les bases de la mécanique classique en introduisant les trois lois de la dynamique ainsi que celle de la gravitation universelle. Newton contribue aussi à l'optique, démontrant la composition spectrale de la lumière blanche, et inventant le télescope à réflexion. En mathématiques, il développa le calcul infinitésimal parallèlement à Leibniz. Il devient président de la Royal Society et maître de la Monnaie royale. Décédé en 1727, il laisse une œuvre qui demeure fondamentale dans la science moderne.*

I - Décrire le mouvement d'un point

I.A - Du solide au point matériel

Dans tous les exemples étudiés au lycée et en cours de SI, les systèmes mécaniques étudiés sont des solides.



Un **solide indéformable** est un système matériel $\mathcal{S}$ dont les points restent à distance constante les uns des autres au cours du temps.

$$\forall M_1, M_2 \in \mathcal{S}, \quad M_1 M_2 = \text{cte}$$

Le solide indéformable est un modèle : un solide parfaitement indéformable n'existe pas. Nous effleurons la mécanique des solides dans la suite du cours de mécanique, et vous l'étudierez davantage en SI. Dans un premier temps, nous modéliserons les solides par des points matériels.



On appelle **point matériel** un point, au sens géométrique du terme, auquel est affecté une masse m .

Intérêt : pourquoi s'intéresser à des points alors que les systèmes sont des solides ?

- conceptuel : les lois fondamentales de la mécanique sont formulées pour des points matériels ;
- technique : décrire le mouvement d'un point est plus facile que de décrire celui d'un solide, qui peut tourner sur lui-même, etc.



Validité du modèle : lorsque l'on modélise un solide par un point, que néglige-t-on ?

Son extension et son orientation.

Espace 1

Quel point du solide choisir ?

- un point physiquement particulier : le célèbre **centre de masse** ou **centre d'inertie**

Espace 2

- un point géométriquement particulier : p.ex. un point où le solide est attaché, une extrémité, un coin, etc.

I.B - Référentiel et repère de temps

I.B.1 - Relativité du mouvement

Comment définir « bouger » ou « être en mouvement » ?

Évolution de la position relative de deux objets l'un par rapport à l'autre au cours du temps.

Espace 3

On voit dans cette définition apparaître deux aspects :

- nécessité d'une référence de position : il n'y a pas de mouvement absolu, on bouge toujours *par rapport à* quelque chose (exemple du passager assis dans un train, immobile par rapport au train mais en mouvement par rapport au quai lorsque le train avance);
- nécessité d'une référence de temps : il faut comparer les positions relatives *entre deux instants* pour savoir s'il y a mouvement.



On appelle **référentiel** le système physique de référence, considéré fixe, par rapport auquel sont étudiés les mouvements.

Il existe une infinité de référentiels imaginables. En pratique, il y a deux façons de définir un référentiel :

- ou bien en donnant un solide de référence, c'est par exemple le cas du référentiel terrestre;
- ou bien en donnant un point fixe et trois directions de référence (donc en pratique des points), c'est par exemple le cas des référentiels géocentrique ou héliocentrique.



💣💣💣 **Attention !** Il ne faut pas confondre le *référentiel*, c'est-à-dire le système de référence (notion *physique*) avec le *repère*, c'est-à-dire l'outil géométrique qui sert à décrire le mouvement (notion *mathématique*). Il y a une infinité de repères différents qui peuvent être associés à un même référentiel.

I.B.2 - Référentiels galiléens

• Définition et postulat d'existence



Première loi de Newton :

Il existe une famille de référentiels, appelés **référentiels galiléens**, dans lesquels le **principe d'inertie** est vérifié :
un point matériel isolé a un mouvement rectiligne uniforme.



↪ quand on veut étudier un mouvement, tous les référentiels ne sont pas équivalents.

Signification des différents termes :

▸ « Isolé » :

le point matériel n'est soumis à aucune force, ou à défaut les forces qu'il subit se compensent : c'est un cas limite théorique, inatteignable en pratique

Espace 4

▸ « Mouvement rectiligne » : la trajectoire est une droite

Espace 5

▸ « Mouvement uniforme » : la trajectoire est parcourue à vitesse constante

Espace 6

💣💣💣 **Attention !** La première loi de Newton est un *postulat d'existence* d'un certain type de référentiels. Elle n'est pas du tout une caractérisation du mouvement d'un point matériel isolé.

• Mouvement relatif de deux référentiels galiléens



Tous les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Démonstration qualitative : Considérons un point M en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel $\mathcal{R}_1$, voir figure 1, et un référentiel $\mathcal{R}_2$ lui aussi en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_1$. Alors on constate que le mouvement de M par rapport à $\mathcal{R}_2$ est également rectiligne uniforme.

→ si $\mathcal{R}_1$ est galiléen, alors $\mathcal{R}_2$ l'est aussi, et plus généralement tous les référentiels en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_1$ le sont.

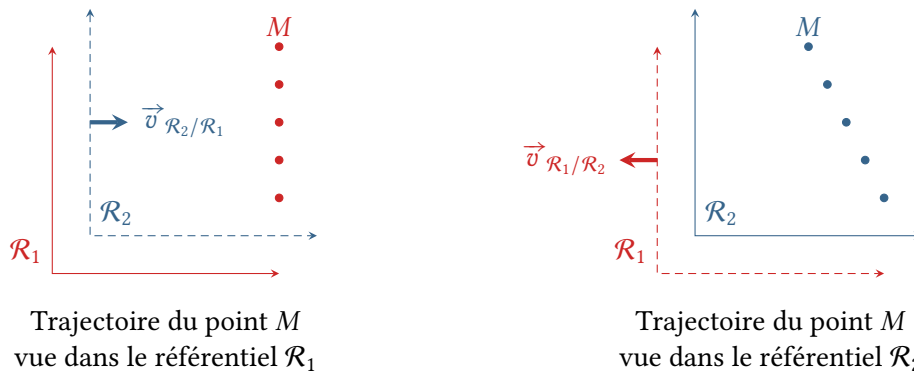


Figure 1 – Mouvement relatif de deux référentiels galiléens. Le mouvement du point M est figuré sous forme de chronophotographie : la figure représente ses positions successives à des instants régulièrement espacés.

I.B.3 - Référentiels usuels



Exactement comme la notion de système isolé qui le définit, la notion de référentiel galiléen est un cas limite théorique. Pour le dire très schématiquement, considérer un référentiel comme galiléen est une bonne approximation tant qu'on peut négliger son mouvement par rapport à un référentiel « plus grand ».

► Le **référentiel terrestre**, parfois appelé **référentiel du laboratoire**, est lié à la surface de la Terre.

Validité du caractère galiléen :

tant qu'on peut négliger la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles, de durée 24 heures.

Espace 7

Mouvements auxquels il est adapté :

mouvements sur Terre de quelques heures au maximum.

Espace 8

► Le **référentiel géocentrique** est défini par le centre de la Terre et des axes pointant vers des étoiles très lointaines. Un point à la surface de la Terre est donc en mouvement dans le référentiel géocentrique.

Validité du caractère galiléen :

tant qu'on peut négliger la rotation de la Terre autour du Soleil, de durée un an.

Espace 9

Mouvements auxquels il est adapté :

mouvements autour de la Terre de quelques semaines au maximum, typiquement Lune et satellites.

Espace 10

- Le **référentiel héliocentrique** est défini par le centre du Soleil et des axes pointant vers des étoiles très lointaines. Le centre de la Terre est donc en mouvement dans le référentiel héliocentrique.

Validité du caractère galiléen :

tant qu'on peut négliger le mouvement du système solaire dans la galaxie, dont la durée caractéristique est de l'ordre de 230 millions d'années.

Espace 11

Mouvements auxquels il est adapté :

mouvements autour du Soleil de quelques milliers d'années au maximum, typiquement celui des planètes, comètes, astéroïdes, etc.

Espace 12

→ le référentiel héliocentrique est le « plus galiléen » des référentiels.

I.B.4 - Le temps



En mécanique classique, le temps est dit **absolu** : les durées ne dépendent pas du référentiel dans lequel elles sont mesurées.

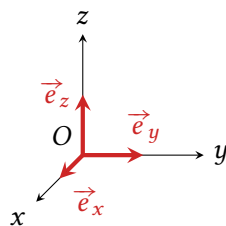
Concrètement, que vous chronométriez votre promenade en vélo avec votre compteur de vélo (référentiel en mouvement par rapport au référentiel terrestre) ou depuis la maison (référentiel terrestre), vous obtiendrez la même durée. Ce ne serait plus le cas si vous faisiez votre promenade en fusée à une vitesse proche de celle de la lumière : c'est la **dilatation des durées**. Le caractère absolu du temps est un postulat de la mécanique classique, mais il est mis en défaut dans le cadre de la relativité restreinte.

I.C - Vecteurs cinématiques

Ce sont les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ du point M . Ils contiennent la totalité des informations sur le mouvement du point M .

I.C.1 - Repère cartésien

Un **repère** est un outil géométrique qui sert à décrire le mouvement. Le plus naturel des repères est le repère cartésien.

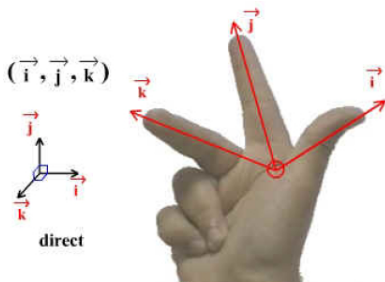


Le **repère cartésien** est composé d'une origine O et d'une base orthonormée directe de vecteurs unitaires $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Le repère cartésien est fixe par rapport au référentiel d'étude.

R

Base directe :



Une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **directe** si ses trois vecteurs de base **pris dans cet ordre** ont des directions qui correspondent à celles des trois premiers doigts de la main droite.

⚠⚠⚠ **Attention !** L'ordre des vecteurs a une importance ! La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe, mais la base $(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$ ne l'est pas.

Q

Vecteurs unitaires : un vecteur unitaire est un vecteur sans dimension et de norme 1,

$$\|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = \|\vec{e}_z\| = 1$$

En physique, un vecteur unitaire sert à indiquer une direction.

Remarque : Notation des vecteurs de base.

- On rencontre indifféremment les notations $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ ou $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
- La notation $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, utilisée en mathématiques, n'est pas utilisée en physique.
- La notation $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, utilisée en SI, est à **bannir totalement** de vos réflexes en physique car elle devient vite source de confusion entre coordonnées et vecteurs unitaires.

Repère fixe : les vecteurs unitaires ne dépendent pas du temps :

$$\left. \frac{d\vec{e}_x}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{e}_y}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{e}_z}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{0}$$

Espace 13

Coordonnées, composantes et norme : les projections d'un vecteur quelconque $\vec{V}$ sur les trois vecteurs de base définissent ses **coordonnées** ou **composantes**,

$$\vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y + V_z \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \begin{cases} V_x = \vec{V} \cdot \vec{e}_x \\ V_y = \vec{V} \cdot \vec{e}_y \\ V_z = \vec{V} \cdot \vec{e}_z \end{cases}$$

Le **norme** d'un vecteur se déduit de ses composantes :

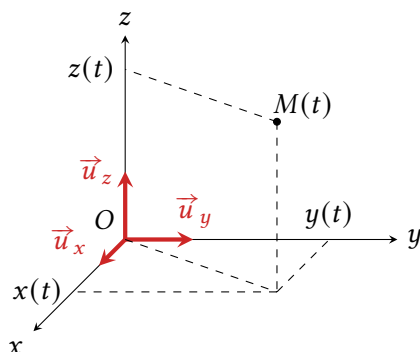
$$V = \|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}}$$

Espace 14

I.C.2 - Vecteur position

Coordonnées du point M à l'instant t :

$$\begin{array}{ccc} x(t), & y(t), & z(t) \\ \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\ \text{abscisse} & \text{ordonnée} & \text{cote} \end{array}$$



On appelle **vecteur position** le vecteur

$$\vec{OM}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z.$$

Le vecteur position est un vecteur dimensionné : sa norme et ses composantes s'expriment en mètre.

Il dépend du choix de l'origine O .

Il est fréquent de sous-entendre la dépendance en temps et de noter simplement

$$\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z.$$

Il ne faut alors pas oublier que x, y et z désignent les coordonnées de M à l'instant t .

I.C.3 - Vecteur vitesse

• Définition

On appelle **vecteur déplacement** d'un point M entre deux instants t et $t + \Delta t$ le vecteur

$$\Delta \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)} \underset{\text{Chasles}}{=} \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}.$$

On définit par suite le vecteur vitesse moyenne pendant une durée Δt ,

$$\vec{v}_{\text{moy}} = \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t}.$$

puis le vecteur vitesse instantanée en prenant la durée Δt comme étant infiniment petite :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}.$$

Le vecteur vitesse instantanée d'un point M dans un référentiel $\mathcal{R}$ est la dérivée temporelle du vecteur position,

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

Le vecteur vitesse dépend du référentiel mais pas de l'origine du repère.

C'est un vecteur dimensionné : sa norme et ses composantes s'expriment en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

• Expression en coordonnées cartésiennes

La dérivation des vecteurs se fait exactement comme la dérivation des fonctions classiques. Il ne faut simplement pas oublier que les vecteurs peuvent dépendre du temps.

En explicitant le calcul,

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + x \frac{d\vec{e}_x}{dt} + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + y \frac{d\vec{e}_y}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z + z \frac{d\vec{e}_z}{dt} \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z}$$

Espace 15

Autre notation : en mécanique, la dérivée par rapport au temps est souvent notée d'un point,

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z$$

• Direction et sens du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse instantané est tangent à la trajectoire et dirigé dans le sens du mouvement.

On note parfois $\vec{u}_T$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire et dirigé dans le sens du mouvement (cf. base de Frénet), on a alors

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = v \vec{u}_T.$$

I.C.4 - Vecteur accélération

Qualitativement, l'accélération d'un point quantifie ses variations de vitesse. Comme la vitesse peut changer en norme mais aussi en direction, il est naturel que l'accélération soit une quantité vectorielle.

R

Le vecteur accélération instantanée d'un point M dans un référentiel $\mathcal{R}$ est la dérivée temporelle de son vecteur vitesse par rapport à ce même référentiel,

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}}$$

Comme le vecteur vitesse, le vecteur accélération dépend du référentiel dans lequel le mouvement est étudié, mais pas de l'origine du repère. C'est un vecteur dimensionné : sa norme et ses composantes s'expriment en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

En coordonnées cartésiennes :

R

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \frac{dv_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{e}_y + \frac{dv_z}{dt} \vec{e}_z = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_z$$

Espace 16

II - Actions mécaniques

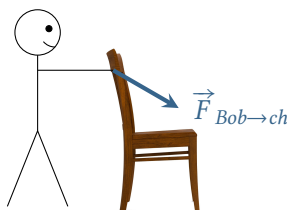
II.A - Modélisation d'une action mécanique par une force

Deux systèmes interagissent en exerçant des **actions mécaniques** l'un sur l'autre. Certaines de ces actions mécaniques sont modélisables par des **forces**.

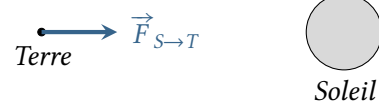
Une **force** $\vec{F}$ est un vecteur caractérisé par sa direction, son sens, sa norme (exprimée en Newton) et son point d'application lorsqu'on raisonne sur un solide.

De façon équivalente, on peut donner son point d'application et ses composantes dans un repère.

Exemples :



(a) Bob et sa chaise



(b) Attraction gravitationnelle

Q

- Une force ne vient pas de nulle part : il y a toujours un **agent** ou **opérateur** qui exerce la force.
- En revanche, une force peut être **de contact** ou **à distance**. Hormis la force de gravitation (et donc le poids) et la force électromagnétique, la plupart des forces sont des forces de contact.
- Une force ne dépend pas du référentiel dans lequel le mouvement est étudié.
- Au niveau microscopique, toutes les actions mécaniques sont des forces. Ce n'est plus vrai au niveau macroscopique, où il existe des actions mécaniques de contact plus complexes, cf. chapitre de mécanique des solides et le cours de SI.

Exemple : Lorsque l'on prend un objet pour le déplacer en le faisant tourner sur lui-même, l'action mécanique exercée par la main sur l'objet ne peut pas être modélisée par une simple force.

II.B - Principe des actions réciproques

Une force est *un* point de vue sur l'interaction : on distingue l'opérateur du système qui subit la force. En réalité, cette interaction implique deux forces, reliées par le principe des actions réciproques.

Principe des actions réciproques ou troisième loi de Newton :

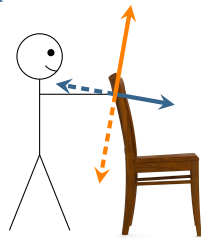
Si un système S_1 exerce une force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ sur un système S_2 , alors S_2 exerce une force sur S_1 de même direction, de même norme et de sens opposé à $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$:

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}.$$

Si les points d'application M_1 et M_2 sont différents, alors les deux forces sont dirigées par la droite M_1M_2 .

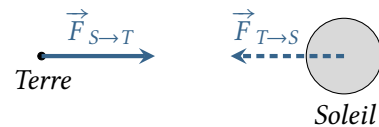
Le principe des actions réciproques est un postulat de la mécanique, au même titre que les autres lois de Newton.

Exemples :



(a) Bob et sa chaise

$$\begin{aligned} \longrightarrow & \vec{F}_{\text{Bob} \rightarrow \text{ch}} \\ \dashrightarrow & \vec{F}_{\text{ch} \rightarrow \text{Bob}} \end{aligned}$$



(b) Attraction gravitationnelle

II.C - Classification des forces

II.C.1 - Quatre interactions fondamentales

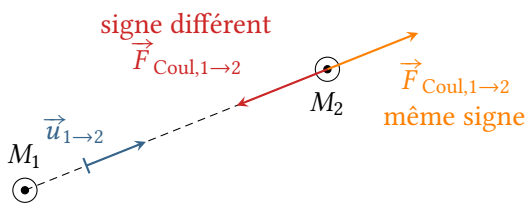
Quatre interactions fondamentales, aussi appelées interactions élémentaires, sont responsables de tous les phénomènes physiques observés dans l'Univers.

Interaction faible : interaction de faible intensité et de très courte portée ($\sim 10^{-18}$ m) intervenant entre nucléons, responsable de certaines transformations radioactives (radioactivité β ou fusion nucléaire). Contrairement aux forces usuelles, elle n'est ni attractive ni répulsive mais génératrice de transformations.

Interaction forte : force de très forte intensité mais de très courte portée ($\sim 10^{-14}$ m), responsable de la cohésion des noyaux atomiques : c'est grâce à la force forte que les protons restent dans le noyau malgré leurs charges électriques identiques.

Interaction électromagnétique : force de moyenne intensité et longue portée, responsable de la cohésion des matériaux et donc de leurs propriétés (dureté, élasticité, viscosité, propriétés chimiques, etc.). Deux charges de signes opposés s'attirent, deux charges de même signe se repoussent, ce qui entraîne un phénomène d'écrantage (= compensation) de l'interaction électromagnétique entre objets macroscopiques.

Deux particules chargées interagissent par la **force de Coulomb**



$$\vec{F}_{\text{Coulomb}, 1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

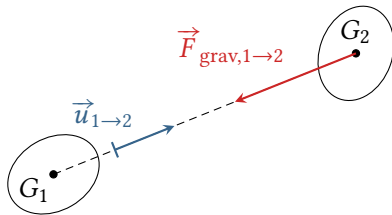
Espace 17

- ▷ q_1 et q_2 sont les charges des deux particules ;
- ▷ $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ est la **permittivité diélectrique du vide** ;
- ▷ r est la distance M_1M_2 ;
- ▷ $\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ est le vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2.

Remarque : Apprendre le signe par cœur peut être piégeux, mieux vaut le retrouver en raisonnant sur la nature attractive ou répulsive de la force en fonction du signe du produit $q_1 q_2$.

Interaction gravitationnelle : force de très faible intensité et longue portée, responsable de la cohésion de l'univers à l'échelle astronomique. Deux masses s'attirent toujours, il ne peut donc pas y avoir d'écrantage de la force de gravitation.

(R)



Deux masses interagissent par la force de gravitation,

$$\vec{F}_{\text{grav},1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

Espace 18

- ▷ $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ est la **constante de gravitation universelle** ou **constante de Cavendish** ;
- ▷ r est la distance $G_1 G_2$;
- ▷ $\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ est le vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2.

II.C.2 - Des forces décrites par une loi de force phénoménologique

C'est le cas le plus courant ! Bien que toutes les forces puissent se ramener à ces quatre interactions, on utilise en pratique des expressions phénoménologiques appelées **lois de force**, établies expérimentalement et/ou par modélisation, et dont le cadre de validité est restreint.

Exemples : poids, poussée d'Archimède, forces de frottement exercées par un fluide, etc.

II.C.3 - Des forces dont l'effet est connu ... mais sans loi de force

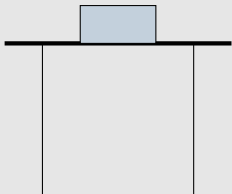
De nombreux mouvements sont contraints par un contact ou une liaison entre le système d'intérêt et une autre partie du dispositif : solide attaché à un fil, qui glisse sur un autre, etc. Dans ce cas la contrainte est connue « parfaitement » et la traduire géométriquement est généralement simple, en revanche il n'y a aucun moyen de connaître a priori la force permettant de maintenir cette contrainte.

Un exemple pour comprendre :

(M)

Application 1 : Une boîte posée sur une table

corrigé p. 19



Considérons une boîte posée sur une table.

- 1 - Lister les forces qu'elle subit, exprimer et représenter la force de réaction lorsqu'elle est simplement posée.
- 2 - Même question si un opérateur appuie sur la boîte avec une force $\vec{F}$.
- 3 - Si la force $\vec{F}$ est dirigée vers le haut, que devient la force de réaction quand la boîte quitte la table ?

⇒ **Généralisation :**

(R)



Les actions mécaniques de contact ou de liaison sont inconnues a priori, car elles dépendent des autres actions mécaniques subies par le système. Elles ne peuvent que se déduire a posteriori de la connaissance du mouvement.

Le contact disparaît lorsque la force de contact s'annule.

↪ une loi de force applicable en toute circonstance *ne peut pas* exister.

II.D - Effet des actions mécaniques sur le mouvement : principe fondamental de la dynamique

Principe fondamental de la dynamique ou seconde loi de Newton :

L'accélération d'un point matériel M est reliée aux forces qu'il subit.

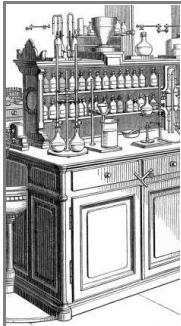
Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen,

$$m \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \sum_{n=1}^N \vec{F}_{n \rightarrow M}.$$

💣💣💣 **Attention !** Il est essentiel que le référentiel $\mathcal{R}$ soit galiléen : si ce n'est pas le cas, la relation de la dynamique ne s'applique pas directement, même s'il est possible de la réécrire en la modifiant. Vous le ferez en MP-MP*.

Remarque : Un point matériel n'a pas d'intérieur, parler de forces « extérieures » n'a donc ici aucun sens. Cela en aura davantage lorsque l'on s'intéressera aux solides.

Le PFD est le « principe fondamental » car il permet de déterminer tous les mouvements : partant de ce principe, on peut retrouver toutes les autres lois de la dynamique. Nous l'utiliserons par exemple pour démontrer le théorème de l'énergie cinétique. Toutefois, attention à ne pas lui en faire dire trop : ce n'est pas le principe fondamental « de la mécanique », qui n'existe pas. Le principe d'inertie et le principe des actions réciproques sont des postulats nécessaires pour que la théorie soit complète.



Un peu d'histoire : On pourrait (voire on devrait) s'étonner de voir apparaître dans le PFD la même masse que dans la force de gravitation. Cette identité entre les deux masses n'a de fait rien d'évident : il s'agit d'un postulat de la physique contemporaine, appelé principe d'équivalence, sur lequel se fonde la relativité. Cette hypothèse a été testée avec une grande précision de longue date, d'abord grâce à des expériences de torsion comme celles d'Eötvös en 1908, puis par des mesures satellitaires et atomiques, qui ont toujours été compatibles avec l'égalité au sens du z-score. Les derniers résultats expérimentaux publiés à ce sujet datent de 2022, et indiquent que l'écart relatif entre les deux masses est inférieur à $3 \cdot 10^{-15}$.

⇒ **Généralisation :** on admet que la relation de la dynamique s'écrit de manière analogue pour un solide en considérant l'accélération de son centre de masse G .

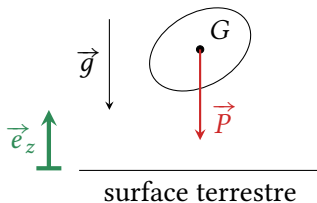
↪ nous le démontrerons dans le cours de mécanique des solides.

III - Exemple : chute libre sans frottement

Une **chute libre** est un mouvement induit par la pesanteur et sans contact avec aucun support d'aucune sorte.

III.A - Poids et force de gravitation

Le poids est la force de gravitation exprimée à la surface de la Terre.



$$\vec{P} = -\frac{GM_T}{R_T^2} m \vec{e}_z = m \vec{g}$$

Espace 19

La Terre étant légèrement aplatie aux pôles, le **champ de pesanteur** g dépend de la latitude. En France métropolitaine,

$$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

III.B - Équation du mouvement et lois horaires

On appelle **équation du mouvement** l'équation différentielle vérifiée par le vecteur position ou le vecteur vitesse du système étudié. Les **lois horaires** ou **équations horaires** sont les expressions des coordonnées du point d'intérêt. Elles s'obtiennent en résolvant l'équation du mouvement.

III.B.1 - Équation du mouvement

Plan d'étude d'un problème de mécanique :

- ❶ **Système** à définir ;
- ❷ **Référentiel galiléen** à identifier ;
- ❸ **Schéma** correspondant à un instant *quelconque*, mais ni à l'instant initial ni à un instant particulier (sommet de la trajectoire, etc.) ;
- ❹ Construction d'un **repère** adapté au problème et expression des **vecteurs cinématiques** dans ce repère et tenant compte des particularités du mouvement étudié (p.ex. mouvement plan, etc.) ;
- ❺ **Bilan des forces** et expression sur les vecteurs de base du repère choisi.
- ❻ Application du **PFD** (ou autre théorème) pour en déduire l'équation du mouvement.

Application 2 : Équation du mouvement de chute libre

corrigé p. 19

Un projectile (balle de tennis, poids d'athlétisme, etc.) est lancé depuis le sol avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ formant un angle α avec l'horizontale. Établir l'équation du mouvement.

⇒ **Généralisation** : une chute libre sans frottement est un **mouvement uniformément accéléré** : le vecteur accélération du système est constant.

III.B.2 - Équations horaires

L'équation du mouvement n'est ici pas une équation différentielle qui relierait une fonction et ses dérivées, mais elle donne directement l'expression d'une dérivée.

Première méthode : intégrations successives « classiques ».

Application 3 : Lois horaires du mouvement de chute libre

corrigé p. 20

En procédant par intégrations successives, établir les lois horaires du mouvement du projectile.

Seconde méthode : intégrer par **séparation des variables** consiste à traiter une dérivée première comme une fraction, regrouper de part et d'autre de l'égalité ce qui dépend de chaque variable, et intégrer.

⚠⚠⚠ **Attention !** Il est impossible d'intégrer de la sorte une dérivée seconde.

Diagram illustrating the separation of variables for the equation of motion:

$$\frac{dv_z}{dt} = -g \quad \leadsto \quad dv_z = -g dt \quad \leadsto \quad \int_{v_z(0)}^{v_z(t)} dv_z = -g \int_0^t dt$$

Annotations:

- For $dv_z = -g dt$:
 - Green arrow: tout ce qui dépend de t points to dt .
 - Blue arrow: tout ce qui dépend de v_z points to dv_z .
- For the integral equation:
 - Top text: les bornes d'intégration coïncident avec la grandeur intégrée (points to $v_z(t)$ and 0).
 - Bottom text: les bornes se correspondent en bas ce que l'on connaît en haut ce que l'on cherche (points to $v_z(0)$ and t).

Application 4 : Lois horaires du mouvement de chute libre (bis)

corrigé p. 21

En procédant par séparation des variables, établir les lois horaires du mouvement du projectile.

III.C - Trajectoire

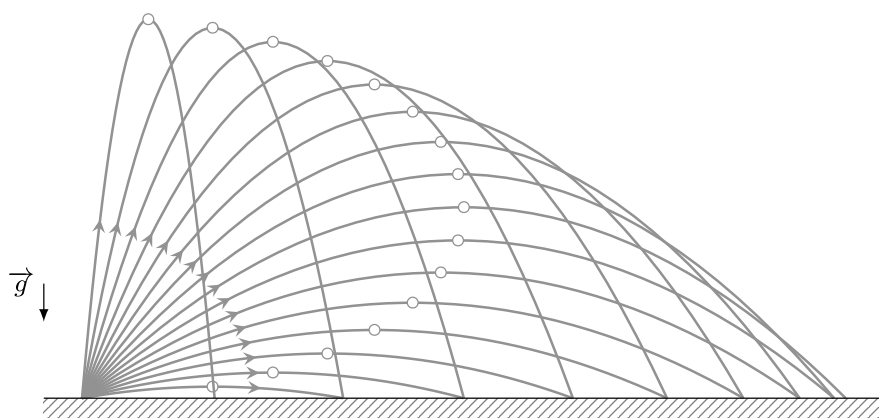
La **trajectoire** est l'ensemble des positions successives occupées par le système. Mathématiquement, elle est donnée par une relation n'impliquant que les coordonnées, et dans laquelle le temps n'intervient plus que de manière implicite.

Application 5 : Trajectoire d'un projectile en chute libre

corrigé p. 21



- 1 - Établir l'équation $z(x)$ de la trajectoire du projectile. La représenter.
- 2 - Déterminer la portée du lancer, c'est-à-dire la distance à laquelle retombe le projectile. Quel angle α choisir pour la maximiser ?
- 3 - Déterminer la flèche du lancer, c'est-à-dire la hauteur maximale atteinte par le projectile. Quel angle α choisir pour la maximiser ?

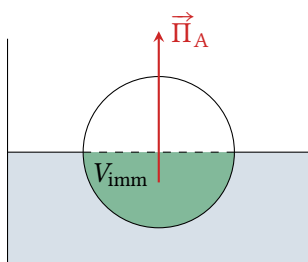
Source image : <https://femto-physique.fr/>

Plusieurs trajectoires pour une même vitesse initiale mais un angle différent sont représentées ci-contre. On peut montrer que toutes les trajectoires restent comprises en dessous d'une courbe limite appelée **parabole de sûreté**.

IV - Exemple : chute verticale dans un fluide

IV.A - Forces exercées par un fluide sur un solide

IV.A.1 - Poussée d'Archimède



La **poussée d'Archimède** $\vec{P}_A$ est la résultante des forces de pression exercées par un fluide sur un solide qui y est immergé.

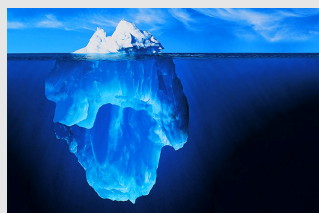
$$\vec{P}_A = -\rho_{\text{fl}} V_{\text{imm}} \vec{g}$$

où ρ_{fl} est la masse volumique du fluide
et V_{imm} le volume immergé dans le fluide.



Application 6 : La partie immergée de l'iceberg

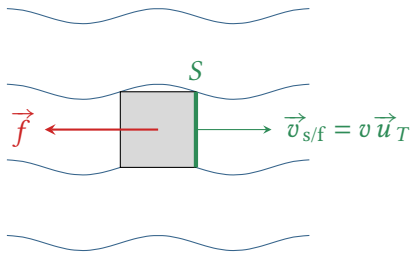
corrigé p. 22



Un iceberg de volume total V est immergé sur un volume V_{imm} . Déterminer le rapport V_{imm}/V , c'est-à-dire la proportion de l'iceberg se trouvant sous la surface.

Données : $\rho_{\text{mer}} = 1,03 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (eau de mer); $\rho_{\text{gl}} = 0,917 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (glace ... d'eau douce, les icebergs étant principalement des blocs détachés de glaciers).

IV.A.2 - Force de traînée



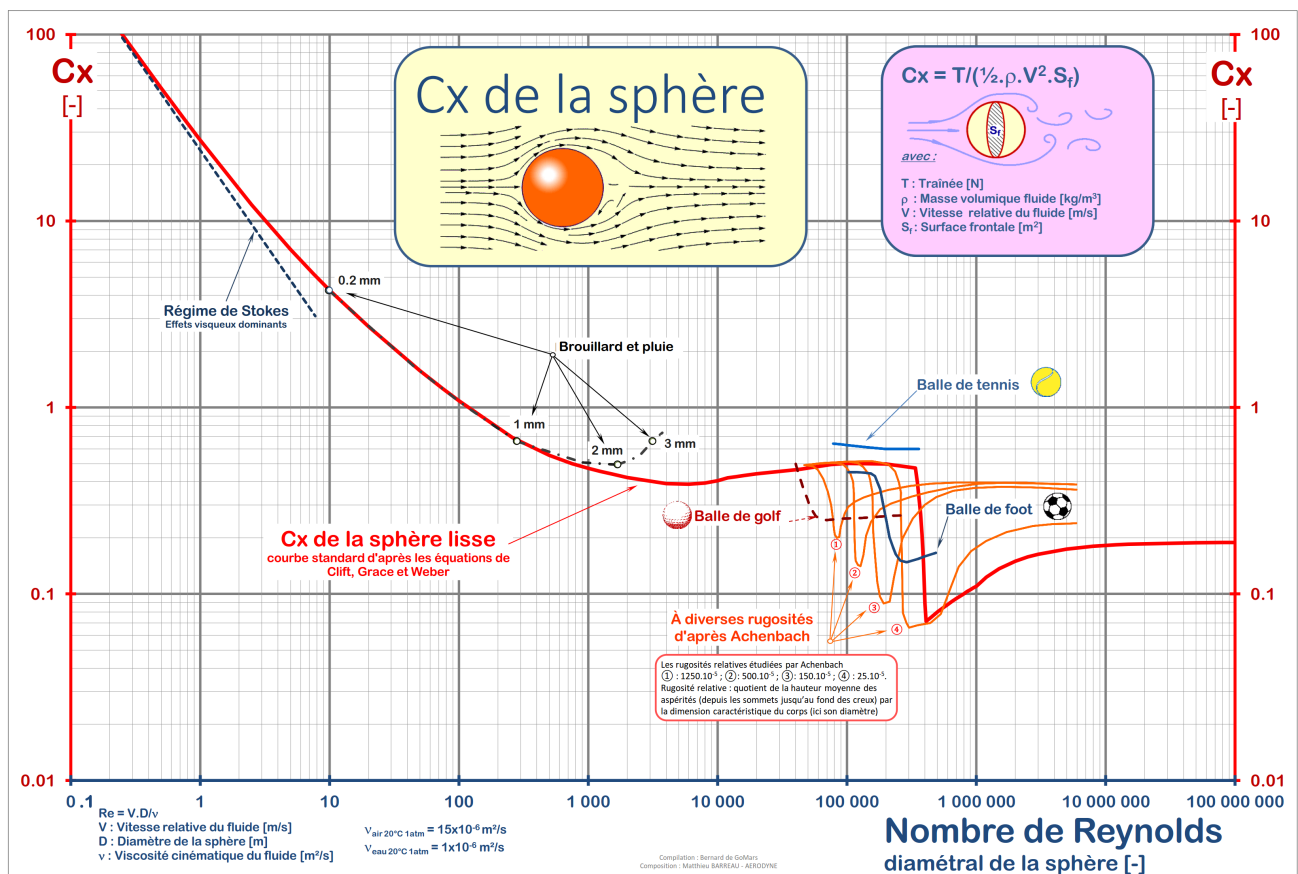
La **force de traînée** est la résultante des forces dues à l'écoulement d'un fluide autour d'un solide (pression dynamique et viscosité). De manière générale, elle s'écrit

$$\vec{f} = -\frac{1}{2} \rho_{\text{fl}} S C_x v^2 \vec{u}_T$$

où S est la surface frontale du solide dans le sens de l'écoulement, v la vitesse relative du solide par rapport au fluide, $\vec{u}_T$ le vecteur unitaire dirigé dans le sens du mouvement et C_x le **coefficient de traînée**.

Le coefficient de traînée dépend de nombreux paramètres : forme et dimensions du solide, rugosités à la surface, viscosité du fluide, masse volumique du fluide, etc. Il n'existe aucune expression exacte, on ne peut la plupart du temps que le déterminer expérimentalement ou numériquement.

► **Pour approfondir** : La figure ci-dessous représente à titre d'exemple la courbe du coefficient de traînée d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds $Re = vD/\nu$, où v est la vitesse du solide par rapport au fluide, D le diamètre de la sphère et $\nu = \eta/\rho$ le rapport entre la viscosité η du fluide et sa masse volumique ρ .



Source image : Wikipédia

On constate qu'il prend des valeurs assez différentes, et notablement modifiées par l'état de surface de la sphère : les creux de la balle de golf n'ont pas le même effet que les poils de la balle de tennis. Voici quelques autres ordres de grandeur usuels :

- avion de ligne : 0,02 à 0,05 ;
- cycliste en position aérodynamique : 0,6 à 0,8 ;
- voiture moderne : 0,20 à 0,35 ;
- sous-marin : 0,03 à 0,05 ;
- parachute : 2,0 à 2,5 ;
- goutte d'eau profilée : 0,04.

La surface frontale S de certains objets n'est pas simple à déterminer (anatomie humaine par exemple), il est donc d'usage en particulier dans le domaine du sport de haut niveau de donner directement le produit SC_x .

Deux cas limites se dégagent néanmoins :

Pour un objet petit et/ou ayant une faible vitesse, $C_x \propto 1/v$ ce qui conduit à une **force linéaire**

$$\vec{f} = -\lambda v \vec{u}_T = -\lambda \vec{v}.$$

Pour objet volumineux et/ou ayant une vitesse élevée, $C_x \simeq \text{cte}$ ce qui conduit à une **force quadratique**

$$\vec{f} = -\mu v^2 \vec{u}_T = -\mu v \vec{v}.$$

où les **coefficients de frottement** λ et μ sont à déterminer expérimentalement.

Lorsque deux solides glissent l'un par rapport à l'autre en présence d'un lubrifiant (suspension de VTT, porte graissée, etc.), la force qu'ils exercent l'un sur l'autre peut généralement se modéliser par un frottement linéaire.

IV.B - Équation du mouvement

Application 7 : Parachutiste

corrigé p. 22

Considérons un parachutiste en chute verticale, pour lequel on modélise les frottements de l'air par une force quadratique de coefficient de frottement μ .

- 1 - Justifier que la poussée d'Archimède ressentie par le parachutiste est négligeable devant son poids.
- 2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par sa vitesse v . Peut-on l'écrire sous forme canonique comme pour un circuit RC ?

IV.C - Grandeurs caractéristiques et adimensionnalisation

La présence du carré rend l'équation différentielle **non-linéaire** ... donc plus compliquée à résoudre, ce qui justifie d'introduire de nouveaux outils d'analyse qualitative.

IV.C.1 - Vitesse limite

Application 8 : Vitesse limite du parachutiste

corrigé p. 22

- 1 - Justifier qualitativement que la vitesse du parachutiste commence par augmenter avant de se stabiliser.
- 2 - Déterminer la vitesse limite v_∞ en raisonnant sur les forces.
- 3 - Retrouver cette expression en raisonnant sur l'équation du mouvement.

IV.C.2 - Temps caractéristique

Le **temps caractéristique** τ du mouvement est l'ordre de grandeur de la durée nécessaire pour atteindre cette vitesse limite ... ou autrement dit la durée de la phase d'accélération.

• Première méthode : analyse dimensionnelle

Application 9 : Détermination du temps caractéristique par analyse dimensionnelle

corrigé p. 23

Déterminer le temps caractéristique du mouvement du parachutiste en raisonnant dimensionnellement.

• **Seconde méthode : adimensionnalisation de l'équation différentielle**

Méthode d'adimensionnalisation d'une équation différentielle

- ❶ Introduire deux **grandeurs caractéristiques** permettant de poser une vitesse et un temps **adimensionnés**,

$$v^* = \frac{v}{v_\infty} \quad \text{et} \quad t^* = \frac{t}{\tau},$$

- ❷ Remplacer dans l'équation différentielle pour l'exprimer en fonction de v^* et t^* au lieu de v et t .

- ❸ En déduire τ (et éventuellement v_∞) en l'identifiant à une **forme adimensionnée** ne faisant plus apparaître de paramètres physiques, ici

$$\frac{dv^*}{dt^*} + (v^*)^2 = 1$$



Dérivée adimensionnée :

Démonstration rigoureuse par un taux d'accroissement :

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t^* \rightarrow 0} \frac{v_\infty (v^*(t + \Delta t) - v^*(t))}{\tau \Delta t^*} = \frac{v_\infty}{\tau} \frac{dv^*}{dt^*}$$

Détermination rapide par analyse dimensionnelle :

$$\left[\frac{dv}{dt} \right] = \frac{[\text{vitesse}]}{[\text{temps}]} \quad \text{et} \quad \left[\frac{dv^*}{dt^*} \right] = 1$$

d'où on déduit qu'il faut multiplier la dérivée adimensionnée par v^*/τ pour pouvoir identifier les deux grandeurs.

Espace 20



Substitution dans l'équation différentielle : De manière directe,

$$\frac{v_\infty}{\tau} \frac{dv^*}{dt^*} + \frac{\mu}{m} v_\infty^2 (v^*)^2 = g$$

Espace 21

Passage à la forme complètement adimensionnée :

Le plus simple est de diviser par g ,

$$\frac{v_\infty}{\tau g} \frac{dv^\star}{dt^\star} + \frac{\mu v_\infty^2}{mg} (v^\star)^2 = 1$$

(M)

Tous les préfacteurs devant être égaux à 1, on en déduit deux équations pour deux grandeurs v_∞ et τ à identifier (ici on pourrait tricher car on a déjà v_∞ , mais cela nous donne au pire un moyen de vérifier la cohérence) :

$$\begin{cases} \frac{v_\infty}{\tau g} = 1 \\ \frac{\mu v_\infty^2}{mg} = 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\mu}} \\ \tau = \frac{v_\infty}{g} = \sqrt{\frac{m}{\mu g}} \end{cases}$$

Espace 22

IV.D - Résolution numérique

Application 10 : Résolution de l'équation du mouvement par la méthode d'Euler

corrigé p. 23

(M)

On souhaite résoudre l'équation du mouvement adimensionnée par la méthode d'Euler explicite.

- 1 - Établir la relation de récurrence obtenue par application du schéma d'Euler explicite.
- 2 - Compléter le code Python (ligne 8) ci-dessous.
- 3 - Analyser la courbe de gauche de la figure 2. Confirme-t-elle les interprétations physiques de v_∞ et τ ?
- 4 - Expliquer l'influence du pas de temps sur les courbes de droite de la figure 2.

```

1  ### PARAMETRES DE LA SIMULATION :
2  dt = 0.02          # pas de temps (tps adimensionné)

4  T = 10             # durée simulation (adim)
5  N = int(T/dt)      # nbre de pas de temps

7  ### IMPLEMENTATION DU SCHEMA D'EULER
8  # à compléter

10 ### TRACE
11 plt.figure()
12 plt.plot(t,v,'r+-')
13 plt.xlabel('t (adim)')
14 plt.ylabel('v (adim)')
15 plt.show()
```

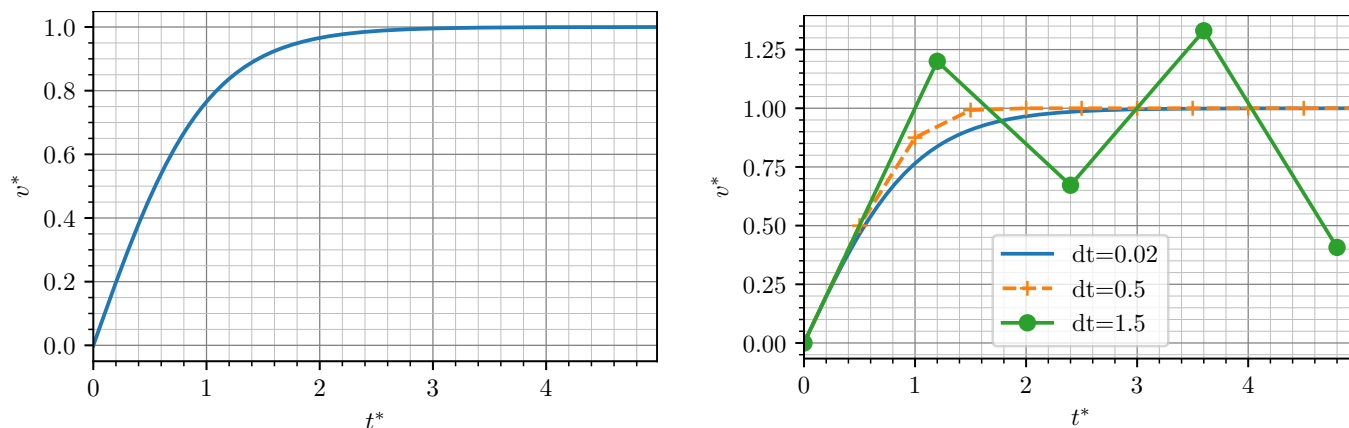


Figure 2 – Résolution numérique de l'équation différentielle. Gauche : résultat obtenu pour un pas de temps bien choisi. Droite : influence du pas de temps sur la courbe obtenue.

⇒ Généralisation :



Pour que la méthode d'Euler puisse conduire à un résultat précis, le pas de temps Δt doit être très petit devant tous les temps caractéristiques du système étudié.

↪ l'équation étant ici adimensionnée, le critère $\Delta t \ll \tau$ devient $\Delta t^* \ll 1$.

⚠⚠⚠ **Attention !** Ce critère est une condition nécessaire mais pas toujours suffisante.

► **Pour approfondir :** L'équation différentielle obtenue peut également être résolue de manière analytique, c'est-à-dire à la main. En séparant les variables, elle devient

$$\frac{dv^*}{1 - (v^*)^2} = dt^*$$

Partant d'une vitesse initiale nulle et en intégrant jusqu'à un instant quelconque,

$$\int_{v^*(0)=0}^{v^*(t^*)} \frac{dv^*}{1 - (v^*)^2} = \int_0^{t^*} dt^* \quad \text{soit} \quad \text{Argtanh}(v^*(t^*)) - \text{Argtanh}(0) = t^* - 0$$

où Argtanh est la fonction *argument tangente hyperbolique* (cf. cours de maths sur les fonctions usuelles à venir ... si ce n'est déjà fait). En inversant cette relation,

$$v^*(t^*) = \tanh(t^*)$$

puis en revenant aux grandeurs dimensionnées

$$v(t) = v_\infty \tanh(t/\tau).$$

Les propriétés de la fonction tangente hyperbolique $\tanh$ permettent de confirmer le statut de vitesse limite pour v_∞ et de temps caractéristique pour τ . ■

Éléments de correction des applications de cours

*Ces corrections sont parfois incomplètes, et presque toujours moins détaillées que ce qui est présenté en classe.
Vos notes de cours sont donc l'outil à privilégier pour les travailler, davantage que le présent document.*

Application 1 : Une boîte posée sur une table énoncé p. 10

Système : boîte ;

Référentiel : terrestre, supposé galiléen ;

- 1** Bilan des forces : la boîte est soumise à
- ▷ son poids $\vec{P}$, vertical et vers le bas ;
 - ▷ la force de réaction $\vec{R}$ exercée par la table, dont on ne sait rien a priori.

Principe d'inertie : la boîte est immobile, donc les forces qu'elle subit se compensent,

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \vec{R} = -\vec{P}.$$

💣💣💣 **Attention !** Il s'agit de la *conclusion* du calcul, et non pas d'une hypothèse affirmée dès le bilan des forces.

Schéma : voir figure 3.

- 2** Bilan des forces : s'ajoute maintenant la force $\vec{F}$ exercée par l'opérateur.

Principe d'inertie : de même que précédemment,

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \vec{R} = -\vec{P} - \vec{F}.$$

Ainsi, la force de réaction $\vec{R}$ exercée par la table a changé en raison de la force exercée par l'opérateur ... c'est bien la preuve qu'on ne peut pas la connaître à l'avance.

Schéma : voir figure 3.

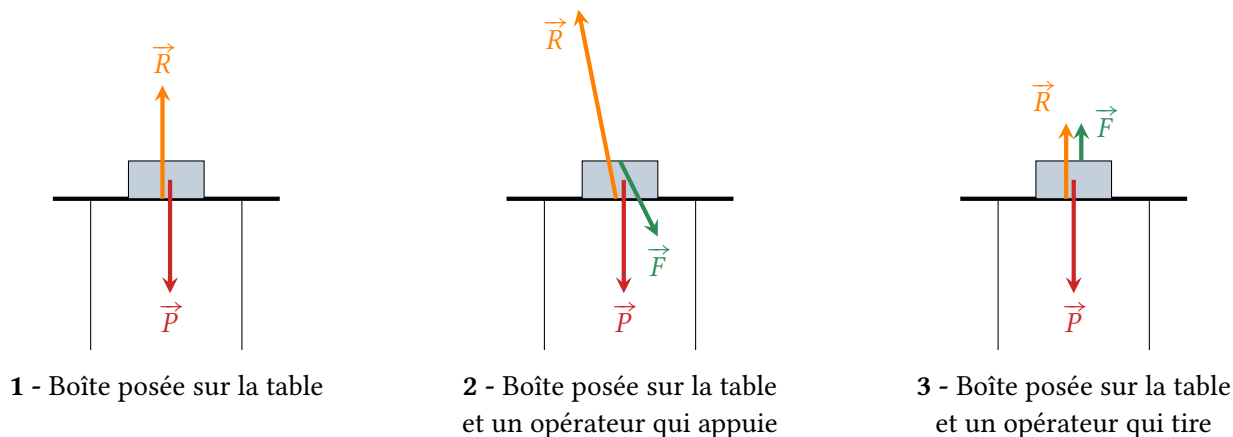


Figure 3 – Schéma des forces subies par la boîte.

- 3** Lorsque la force $\vec{F}$ est dirigée vers le haut, la réaction $\vec{R}$ diminue progressivement jusqu'à s'annuler lorsque la boîte quitte la table.

Application 2 : Équation du mouvement de chute libre d'une balle énoncé p. 12

Système : projectile ;

Référentiel : terrestre, supposé galiléen car la chute dure bien moins que 24 heures ;

Repérage : cartésien, de telle sorte que la vitesse initiale $\vec{v}_0$ se trouve dans le plan (xOz) , voir figure 4

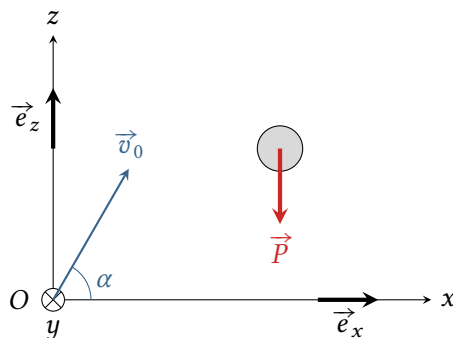


Figure 4 – Projectile en chute libre.

Bilan des forces : uniquement le poids,

$$\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{e}_z.$$

PFD :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} .}$$

Application 3 : Lois horaires du mouvement de chute libre énoncé p. 12

En projetant dans le repère cartésien,

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = -g \end{cases}$$

Projection sur $\vec{e}_x$: première intégration :

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad v_x(t) = A \quad \text{avec} \quad A = \text{cte}$$

Condition initiale :

$$v_x(t=0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{A} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{v_0 \cos \alpha} \quad \text{donc} \quad v_x(t) = v_0 \cos \alpha .$$

Deuxième intégration :

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \quad \text{donc} \quad x(t) = v_0 \cos \alpha t + A' \quad \text{avec} \quad A' = \text{cte}$$

Condition initiale :

$$x(t=0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{A'} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{x(t) = v_0 \cos \alpha t .}$$

Projection sur $\vec{e}_y$: première intégration :

$$\frac{dv_y}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad v_y(t) = B \quad \text{avec} \quad B = \text{cte}$$

Condition initiale :

$$v_y(t=0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{B} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{0} \quad \text{d'où} \quad v_y(t) = 0$$

Deuxième intégration :

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad y(t) = B' \quad \text{avec} \quad B' = \text{cte}$$

Condition initiale :

$$y(t=0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{B'} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{y(t) = 0 .}$$

↪ on montre ainsi que le mouvement est plan.

Projection sur $\vec{e}_z$: première intégration :

$$\frac{dv_z}{dt} = -g \quad \text{donc} \quad v_z(t) = -gt + C \quad \text{avec} \quad C = \text{cte}$$

Condition initiale :

$$v_z(t=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} C \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} v_0 \sin \alpha \quad \text{d'où} \quad v_z(t) = -gt + v_0 \sin \alpha.$$

Deuxième intégration :

$$\frac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha \quad \text{donc} \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + C' \quad \text{avec} \quad C' = \text{cte}$$

Condition initiale :

$$z(t=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} C' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t.}$$

Application 4 : Lois horaires du mouvement de chute libre (bis) énoncé p. 12

Projection sur $\vec{e}_x$: détermination de la vitesse :

$$\int_{v_x(0)=v_0 \cos \alpha}^{v_x(t)} dv_x = \int_0^t 0 dt = 0 \quad \text{soit} \quad v_x(t) - v_0 \cos \alpha = 0 \quad \text{donc} \quad v_x(t) = v_0 \cos \alpha.$$

Détermination de la position :

$$\int_{x(0)=0}^{x(t)} dx = v_0 \cos \alpha \int_0^t dt \quad \text{soit} \quad \boxed{x(t) = v_0 \cos \alpha t.}$$

Projection sur $\vec{e}_z$: détermination de la vitesse :

$$\int_{v_z(0)=v_0 \sin \alpha}^{v_z(t)} dv_z = -g \int_0^t dt \quad \text{soit} \quad v_z(t) - v_0 \sin \alpha = -gt \quad \text{donc} \quad \boxed{v_z(t) = -gt + v_0 \sin \alpha.}$$

Détermination de la position :

$$\int_{z(0)=0}^{z(t)} dz = \int_0^t (-gt + v_0 \sin \alpha) dt \quad \text{soit} \quad \boxed{z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t.}$$

Application 5 : Trajectoire d'un projectile en chute libre énoncé p. 13

1 En remplaçant $t = v_0 / \cos \alpha$,

$$z(x) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + (v_0 \sin \alpha) \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

soit finalement en simplifiant

$$\boxed{z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha)x.}$$

Il s'agit d'une parabole, qui passe (heureusement) par $x = 0$ (↪ test de vraisemblance intéressant!).

2 On cherche x tel que $z(x) = 0$. En excluant la position initiale $x = 0$,

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha = 0 \quad \text{soit} \quad x_{\text{sol}} = \tan \alpha \times \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha).$$

Elle est maximale pour $\sin(2\alpha) = 1$ c'est-à-dire $\alpha = \pi/4$.

3 Il faut étudier la fonction $z(x)$ ou $z(t)$ pour déterminer son maximum. Calculatoirement, il est beaucoup plus simple de travailler sur $z(t)$.

$$\frac{dz}{dt} = v_z = -gt + v_0 \sin \alpha \quad \text{donc} \quad t_{\text{sommet}} = \frac{v_0}{g} \sin \alpha$$

et on remplace dans l'expression de z ,

$$z_{\text{max}} = -\frac{1}{2}g \left(\frac{v_0}{g} \sin \alpha \right)^2 + \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \alpha = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Elle est maximale si $\alpha = \pi/2$, ce qui est conforme à l'intuition.

Application 6 : La partie immergée de l'iceberg énoncé p. 13

☛☛☛ **Attention !** Les forces se compensent ne veut pas dire qu'elles sont égales, mais opposées ... c'est-à-dire égales seulement en norme.

$$\vec{P} + \vec{\Pi}_A = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \frac{V_{\text{imm}}}{V} = \frac{\rho_{\text{gl}}}{\rho_{\text{mer}}} = 89 \%$$

Application 7 : Parachutiste énoncé p. 15

1 Pour montrer qu'une grandeur est négligeable devant une autre, le mieux est de calculer l'ordre de grandeur du rapport entre elles. Notons V_0 le volume du parachutiste.

$$\frac{\|\vec{\Pi}_A\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{\rho_{\text{air}} V_0 g}{\rho_{\text{para}} V_0 g} = \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{para}}} \sim \frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}{10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} \ll 1$$

2 **Système** : parachutiste ;

Référentiel : terrestre supposé galiléen ;

Repérage : Le mouvement est unidimensionnel (le parachutiste tombe tout droit), donc un seul axe (Oz) vertical orienté vers le bas suffit. L'origine est choisie à la position initiale du parachutiste.

$$\overrightarrow{OM} = z(t) \vec{e}_z \quad \rightsquigarrow \quad \vec{v} = \frac{dz}{dt} \vec{e}_z = v \vec{e}_z \quad \rightsquigarrow \quad \vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_z,$$

où $v > 0$ est la (norme de la) vitesse du parachutiste.

Bilan des forces : le parachutiste subit

- son poids : $\vec{P} = m \vec{g} = mg \vec{e}_z$;
- la force de traînée : $\vec{f} = -\mu v^2 \vec{e}_z$.

PFD :

$$m \frac{dv}{dt} = \vec{P} + \vec{f} \quad \text{soit} \quad m \frac{dv}{dt} = mg - \mu v^2 \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{\mu}{m} v^2 = g}.$$

Pas de forme canonique possible à cause du carré v^2 .

Application 8 : Vitesse limite du parachutiste énoncé p. 15

1 Au début de la chute, la vitesse est faible donc les frottements aussi. L'effet du poids est prédominant, la vitesse augmente. Au fur et à mesure, les frottements augmentent également, jusqu'à ce que la force de frottement compense exactement le poids : la vitesse du parachutiste n'évolue plus.

2 Lorsque la vitesse limite est atteinte, les deux forces se compensent :

$$\vec{P} + \vec{f} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad mg - \mu v_{\infty}^2 = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_{\infty} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}}.$$

- 3 La vitesse limite est une solution particulière constante de l'équation du mouvement, ce qui donne

$$0 + \frac{\mu}{m} v_{\infty}^2 = g \quad \text{soit} \quad v_{\infty} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}.$$

Application 9 : Temps caractéristique par analyse dimensionnelle énoncé p. 15

Cherchons le temps caractéristique sous la forme

$$\tau = m^{\alpha} g^{\beta} \mu^{\gamma}.$$

Dimension du coefficient de frottement :

$$[\mu] = \frac{[f]}{[v]^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Équation aux dimensions :

$$s = \text{kg}^{\alpha} \times (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})^{\beta} \times (\text{kg} \cdot \text{m}^{-1})^{\gamma} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} -2\beta = 1 \\ \beta - \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \beta = -1/2 \\ \gamma = -1/2 \\ \alpha = 1/2 \end{cases}$$

Conclusion :

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{\mu g}}.$$

Application 10 : Résolution de l'équation du mouvement par la méthode d'Euler énoncé p. 17

- 1 En retirant les ★ pour alléger les notations, toutes les grandeurs étant adimensionnées,

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} + v_n^2 = 1 \quad \text{soit} \quad v_{n+1} = v_n + (1 - v_n^2) \Delta t.$$

- 2 Il suffit d'initialiser les listes utiles et d'implémenter la relation de récurrence, sans oublier de s'arrêter à $N - 1$ pour ne pas sortir de la liste.

```

1  ### Initialisation des listes :
2  t = [n*dt for n in range(N)]
3  v = [None for n in range(N)]

5  v[0] = 0 # condition initiale

7  ### Schéma d'Euler :
8  for n in range(N-1):
9      v[n+1] = v[n] + (1 - v[n]**2) * dt

```

- 3 On constate qu'au bout d'un temps suffisant $v^* \rightarrow 1$, c'est-à-dire $v \rightarrow v_{\infty}$, ce qui confirme l'interprétation de v_{∞} comme une vitesse limite. La durée caractéristique pour atteindre cette vitesse limite est de l'ordre de 1 en temps adimensionné, ce qui donne bien un temps caractéristique dimensionné de l'ordre de τ . La résolution numérique confirme donc les interprétations.

- 4 Si le pas de temps est trop grand, la courbe calculée ne correspond pas à la réalité : la vitesse (réelle) change trop entre deux pas de temps pour que le schéma d'Euler en donne une bonne approximation.