Mouvements circulaires

Plan du cours

I D'autres repérages des trajectoires planes **1**
I.A Vecteur déplacement élémentaire . . . 1
I.B Cinématique dans la base polaire . . . 2
I.C Cinématique dans la base de Frénet . . . 5
II Généralisation tridimensionnelle **6**
II.A Coordonnées cylindriques : rotation autour d'un axe fixe . . . 6
II.B Coordonnées sphériques : objet à la surface de la Terre . . . 8
III Exemple du pendule simple **8**
III.A Analyse qualitative . . . 8
III.B Équation du mouvement . . . 9
III.C Résolution numérique par la méthode d'Euler . . . 9
III.D Résolution analytique dans la limite des petites oscillations . . . 12

(R) Résultat à connaître par cœur. (M) Méthode à retenir, mais pas le résultat.
(D) Démonstration à savoir refaire. (Q) Aspect qualitatif uniquement.

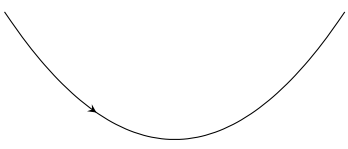
Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.

Ce chapitre se focalise sur les mouvements à trajectoires circulaires. Dans pareille situation, les coordonnées cartésiennes ne sont pas les plus adaptées : les coordonnées polaires le sont bien davantage ... mais les expressions des vecteurs vitesse et accélération sont alors moins immédiates.

I - D'autres repérages des trajectoires planes

I.A - Vecteur déplacement élémentaire

I.A.1 - Définition



Le vecteur déplacement entre t et $t+\Delta t$ est défini par

$$\Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t) \underset{\text{Chasles}}{=} \overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}\,.$$

Le déplacement est qualifié d'**élémentaire** lorsque la durée considérée est infinitésimale. On note alors

$$\mathrm{d}\overrightarrow{M} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \lim_{\Delta t\to 0} \Delta\overrightarrow{OM} \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{d}\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OM}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{OM}(t)\,.$$

Géométriquement, $\mathrm{d}\overrightarrow{M}$ est tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

I.A.2 - Lien au vecteur vitesse

Par définition,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\,.$$

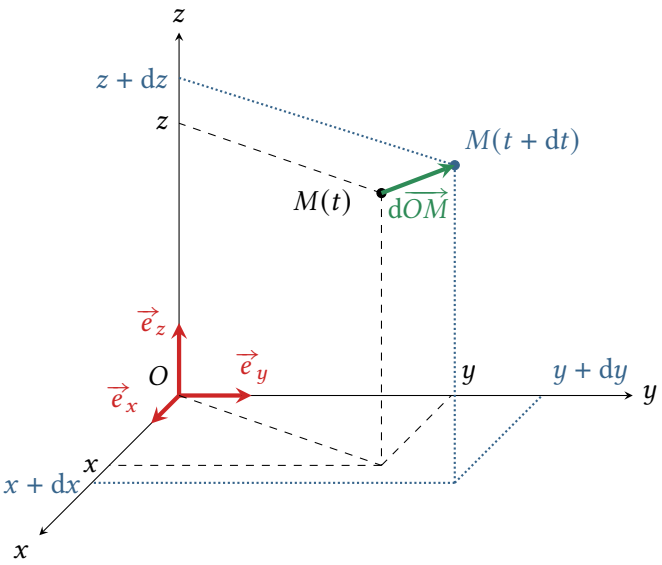
R

Le vecteur déplacement élémentaire et le vecteur vitesse sont reliés par

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \iff \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{v}\,\mathrm{d}t\,.$$

I.A.3 - Expression en coordonnées cartésiennes

Géométriquement : entre t et $t+\mathrm{d}t$ les coordonnées du point M sont passées de (x,y,z) à $(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$.



Espace 1

R

À partir du vecteur vitesse :

Espace 2

I.A.4 - Application à la définition des vecteurs de base

Soit c une des coordonnées du point M. Par définition, le vecteur de base $\vec{e}_c$ est le vecteur unitaire orienté dans la direction et le sens de $\mathrm{d}\overrightarrow{M}$ lorsque seule la coordonnée c varie, toutes les autres restant constantes.

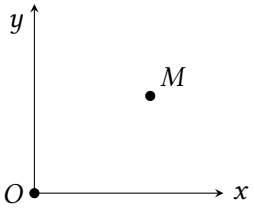
Exemple : si $M(t)$ se déplace en $M(t+\mathrm{d}t)$ tel que x augmente de $\mathrm{d}x$ avec y et z constants, alors

$$\mathrm{d}\overrightarrow{M}_x = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x\,.$$

I.B - Cinématique dans la base polaire

I.B.1 - Coordonnées polaires d'un point

R



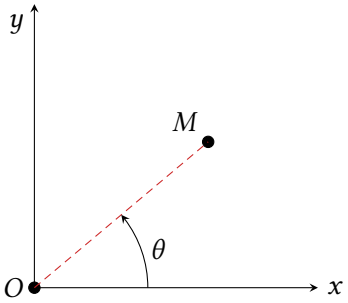
- $r = OM \geq 0$: distance à l'origine O ;
- $\theta = (\vec{e}_x, \overrightarrow{OM})$: angle par rapport à une direction de référence (Ox).

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

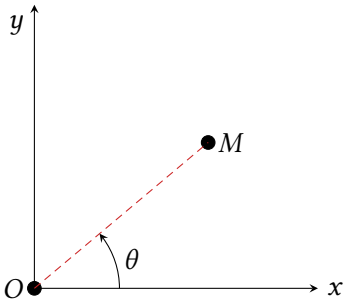
I.B.2 - Base polaire

- **Définition des vecteurs de base**



Vecteur $\vec{e}_r$: direction de $\overrightarrow{\mathrm{d}M}_r$ déplacement élémentaire lorsque

$$\begin{cases} r \mapsto r + \mathrm{d}r \\ \theta \text{ inchangé} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{\mathrm{d}M}_r = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r\,.$$



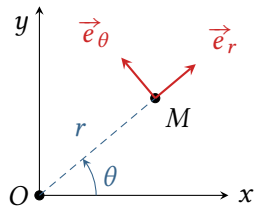
Vecteur $\vec{e}_\theta$: direction de $\overrightarrow{\mathrm{d}M}_\theta$ déplacement élémentaire lorsque

$$\begin{cases} r \text{ inchangé} \\ \theta \mapsto \theta + \mathrm{d}\theta \end{cases}$$

Écriture de $\overrightarrow{\mathrm{d}M}_\theta$:

Espace 3

> ***Remarque :*** *ce résultat revient à assimiler la distance $MM' = ||\overrightarrow{dM}_\theta||$ à la longueur de l'arc de cercle de rayon r reliant ces deux points : par définition d'un angle en radians,*
>
> $$d\theta = \frac{||\overrightarrow{dM}_\theta||}{r}$$



La **base polaire** est la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.
Il s'agit d'une base orthonormée directe.

Elle est attachée au point M : au contraire de la base cartésienne, c'est une **base locale** ou **mobile**, qui le suit au cours de son mouvement.

R

Expression générale du déplacement élémentaire : combinaison d'une variation de chaque coordonnée,

Espace 4

Le vecteur déplacement élémentaire en coordonnées polaires est donné par

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$$

R

- **Expression des vecteurs de la base polaire dans la base cartésienne**

M

↝ si θ dépend du temps, alors $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ aussi.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

- **Dérivation temporelle des vecteurs de base**

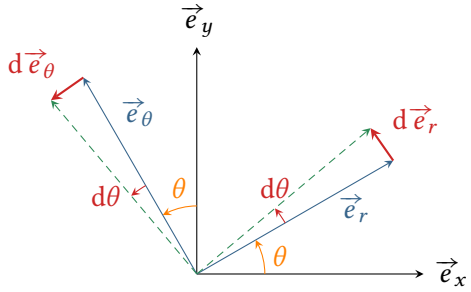
Approche par le calcul : utilisons la formule de dérivation d'une fonction composée,

$$(g\circ f)' = f'\times g'\circ f \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[g\big(f(x)\big)\Big] = f'(x)\times g'\big(f(x)\big) \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\times\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}f}\,.$$

Espace 5

Approche géométrique :

- ▹ lorsque r varie de $\mathrm{d}r$ à θ = cte, les vecteurs de base ne varient pas ;
- ▹ lorsque θ varie de $\mathrm{d}\theta$ à r constant,



Espace 6

Conclusion : à retenir absolument !!

R

Les vecteurs de la base polaire dépendent du temps, et leurs dérivées sont

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot\theta\,\vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\,\vec{e}_r$$

I.B.3 - Vecteurs cinématiques

R

Vecteur position :

Attention ! Les *coordonnées* polaires du point M sont (r,θ), mais les *composantes* du vecteur position dans la base polaire sont $(r,0)$: la dépendance en θ est incluse dans la définition des vecteurs de base.

Vecteur vitesse : l'expression générale établie ici n'est pas forcément à mémoriser, il faut en revanche savoir la retrouver dans la situation particulière adaptée à chaque exercice.

- ▹ *Utilisation du vecteur déplacement élémentaire :*

D

Espace 7

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

▹ *Dérivation directe du vecteur position :*

D

Espace 8

Le vecteur vitesse en coordonnées polaires s'écrit

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\,.$$

Le terme $\dot{r}$ est appelé **vitesse radiale** et $\dot{\theta}$ est la **vitesse angulaire**, parfois notée ω ou Ω.

Vecteur accélération : l'expression générale établie ici est peu utile et n'est pas à mémoriser, il faut en revanche savoir la retrouver dans la situation particulière adaptée à chaque exercice.

M

Espace 9

> ***Remarque :*** *L'homogénéité ($[a] = \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$) permet de contrôler le nombre de r (un seul) et le nombre de points (deux) de chaque terme.*

M

Application 1 : Vitesse et accélération

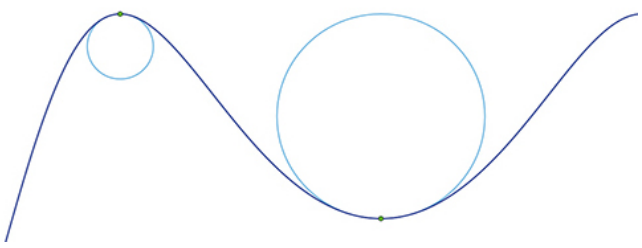
Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération pour les deux mouvements suivants. Établir les résultats par dérivation du vecteur position, mais pas en simplifiant les expressions générales (même si bien sûr ça marcherait !)

1 - Mouvement circulaire ($r = R = \text{cte}$) : exprimer d'abord $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en fonction de R, θ et ses dérivées, puis exprimer $\vec{a}$ uniquement en fonction de R et de la composante v_θ de la vitesse.

2 - Mouvement « spiralaire » : vitesse angulaire $\dot{\theta} = \Omega = \text{cte}$, mais r variable.

I.C - Cinématique dans la base de Frénet

I.C.1 - Cercle osculateur d'une courbe

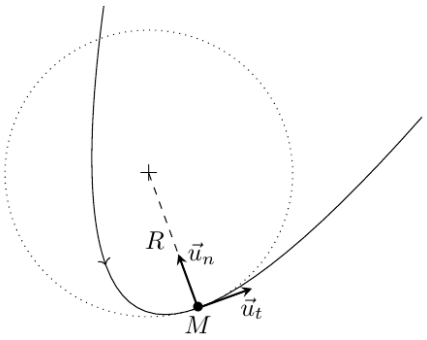


On appelle **cercle osculateur** d'une courbe C en un point P donné le cercle tangent à cette courbe et qui l'approche au mieux (cf. Wikipédia pour plus de détails mathématiques). Le rayon R du cercle osculateur est appelé **rayon de courbure** de C au point P, et son centre Ω est le **centre de courbure**.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

I.C.2 - Base de Frénet



La **base de Frénet** $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$ est une base orthonormée locale, définie en tout point M d'une trajectoire plane.

- $\vec{u}_t$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire orienté dans le sens du mouvement ;
- $\vec{u}_n$ est le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}_t$ orienté vers l'intérieur de la courbure, c'est-à-dire dirigé vers le centre de courbure.

> ***Remarque :*** *les vecteurs unitaires de la base de Frénet sont parfois notés* $(\vec{t}, \vec{n})$ *ou* $(\vec{\tau}, \vec{n})$.

- **Vecteurs cinématiques**

Les vecteurs vitesse et accélération dans la base de Frénet se retrouvent en considérant que le mouvement est localement circulaire sur le cercle osculateur.

Espace 10

Les vecteurs vitesse et accélération s'écrivent dans la base de Frénet

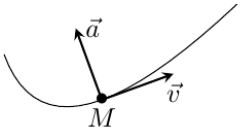
$$\vec{v} = v\,\vec{u}_t \qquad \text{et} \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\,\vec{u}_n\,.$$

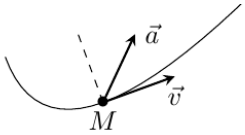
où $v = ||\vec{v}||$ et R est le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré.

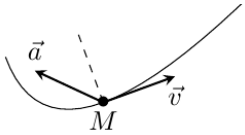
> ***Remarque :*** *Ces relations montrent très explicitement que* $v = ||\vec{v}|| = cte$ *n'est pas du tout équivalent à* $\vec{a} = \vec{0}$*, en raison des changements de direction du vecteur vitesse.*

Interprétation géométrique : les projections de $\vec{a}$ sur la base de Frénet donnent des informations qualitatives importantes sur le mouvement.

- $\vec{a} \cdot \vec{u}_n \geq 0$: l'accélération (et donc la somme des forces !) est toujours dirigée vers l'intérieur de la courbure ;
- le signe de $\vec{a} \cdot \vec{u}_t$ ou $\vec{a} \cdot \vec{v}$ indique si le mouvement est ralenti (< 0), uniforme ($\vec{a} \perp \vec{v}$) ou accéléré (> 0).







II - Généralisation tridimensionnelle

Les coordonnées polaires définissent un repérage *du plan*, mais il est parfois nécessaire de généraliser au repérage *de l'espace*. On a alors deux possibilités pour la troisième coordonnée : une longueur ou un angle.

II.A - Coordonnées cylindriques : rotation autour d'un axe fixe

La situation typique où les coordonnées cylindriques s'imposent est celle du repérage d'un point appartenant à un solide en rotation autour d'un axe fixe. L'idée consiste à repérer d'une part la position du point sur son cercle trajectoire (coordonnées polaires) et d'autre part sa hauteur le long de l'axe (type coordonnées cartésiennes).

⇝ cette idée permet de définir les **coordonnées cylindriques** (r, θ, z) du point M, voir figure 1.

Attention ! $r = OH \neq OM$, où H est le projeté orthogonal de M dans le plan (Oxy)

La base cylindrique est une **base locale**, c'est-à-dire qui suit M au cours de son mouvement, mais le vecteur $\vec{e}_z$ est fixe, ce qui simplifie les calculs.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

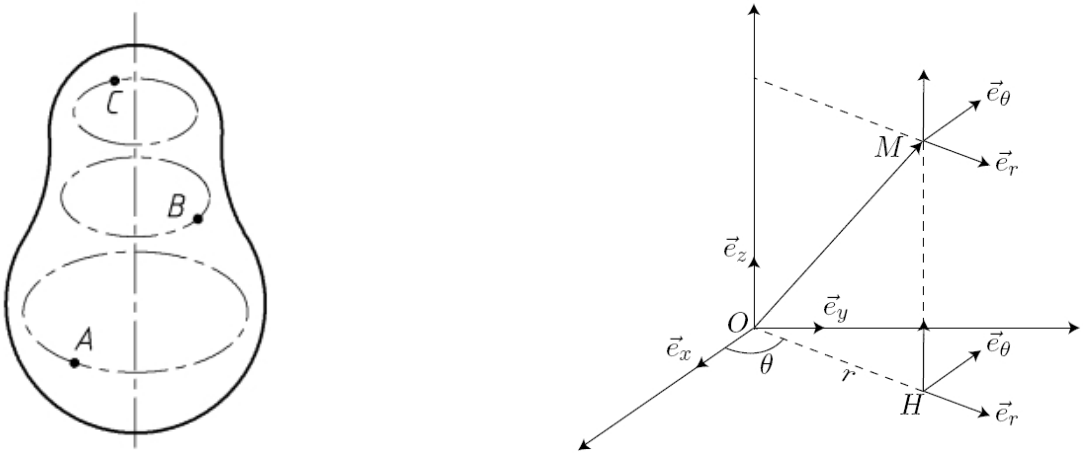


Figure 1 – Coordonnées cylindriques.

Dérivées des vecteurs de base :

Espace 11

Vecteur position :

Espace 12

Vecteur déplacement élémentaire :

Espace 13

Les vecteurs cinématiques en coordonnées cylindriques sont donnés par

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$$
$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$$
$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$$
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{e}_z$$

⇝ qualitativement, comme $\vec{e}_z$ est fixe, il ne « se mélange pas » avec les autres vecteurs dans les calculs.

> ***Remarque :*** *comme on pouvait s'y attendre, les coordonnées cylindriques coïncident avec les coordonnées polaires dans le plan $z = 0$.*

BY-NC-SA

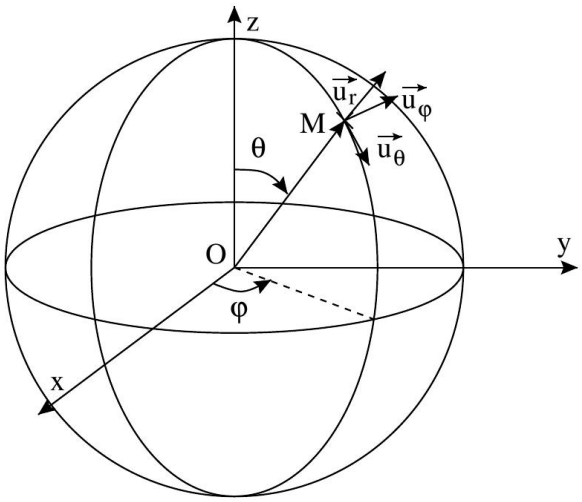
© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

II.B - Coordonnées sphériques : objet à la surface de la Terre

La situation typique où les coordonnées sphériques s'imposent est celle du repérage d'un objet à la « surface » de la Terre, type bateau ou satellite : plutôt qu'une longueur, la troisième coordonnée est un angle.

⇝ on définit ainsi les **coordonnées sphériques** (r, θ, φ) du point M.

Q



- Rayon $r = OM \geq 0$;
- Colatitude θ restreint au domaine $[0, \pi]$ ... et non pas $[0, 2\pi]$;
- Azimuth $\varphi \in [0, 2\pi[$

Vecteur position :

Espace 14

Vecteur déplacement élémentaire :

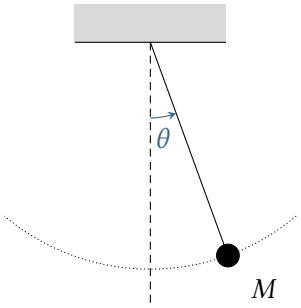
$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

L'expression générale du vecteur accélération existe, mais n'a pas d'intérêt.

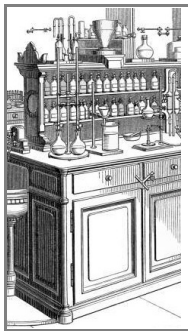
> ***Remarque :*** *Plutôt que la colatitude θ, on utilise en mécanique terrestre la latitude λ définie comme l'angle $\widehat{HOM}$, mesurée depuis un rayon équatorial et non pas depuis l'axe des pôles. Ainsi, $\lambda = \pi/2 - \theta$.*

➽ **Pour approfondir :** La restriction du domaine de définition de θ est nécessaire pour éviter une redondance dans la définition des coordonnées : le point symétrique par rapport à (Oz) d'un point de coordonnées (r, θ, φ) pourrait avoir comme coordonnées $(r, -\theta, \varphi)$ ou $(r, \theta, \varphi + \pi)$. Pour lever l'ambiguïté, la deuxième expression est privilégiée et le domaine de définition de θ restreint. ■

III - Exemple du pendule simple



Un **pendule simple** est constitué d'une masse m suspendue à un bâti par un fil de longueur ℓ constamment tendu. Lorsqu'il est décalé de sa position d'équilibre, il y revient en oscillant sous l'effet de la gravité.



Un peu d'histoire : *La seconde trouve son origine dans la division du jour en $24 \times 60 \times 60 = 86\,400$ parties égales, définie dans l'Antiquité par les Égyptiens, qui comptaient en base 12, et les Babyloniens, qui comptaient en base 60. Au XVII^e siècle, le pendule simple joue un rôle majeur dans sa définition pratique. Galilée observe l'isochronisme des petites oscillations, et Huygens construit en 1656 une horloge à pendule d'une précision inédite. La coïncidence des valeurs numériques, telles que la période d'un pendule simple de longueur 1 m est pratiquement égale à 2 s dans un lieu où $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, fournit une référence pour la seconde facilement réalisable, exploitée jusqu'au milieu du XX^e siècle, avant d'être remplacée par des réalisations électroniques.*

III.A - Analyse qualitative

M

Application 2 : Pulsation des oscillations

En raisonnant dimensionnellement, identifier une pulsation ω_0 caractéristique des oscillations du pendule.

Q

⇝ un angle étant sans dimension, l'analyse dimensionnelle ne permet pas de savoir si la pulsation des oscillations dépend ou non de leur amplitude angulaire.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

III.B - Équation du mouvement

Application 3 : Équation du mouvement M

Établir l'équation du mouvement du pendule simple, c'est-à-dire l'équation différentielle vérifiée par sa coordonnée angulaire θ.

Q

L'équation du mouvement d'un pendule simple s'écrit

$$\ddot{\theta} + {\omega_0}^2 \sin\theta = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Le sinus rend cette équation différentielle non linéaire : elle n'admet pas de solution analytique simple.

III.C - Résolution numérique par la méthode d'Euler

III.C.1 - Schéma d'Euler pour une équation différentielle du second ordre

- **Rappel : résolution numérique d'une équation différentielle**

Comme il n'est pas possible de résoudre une équation différentielle « à tout instant » avec un ordinateur, il est nécessaire de passer par une résolution à N **instants discrets** $t_0, t_1, ..., t_n, ..., t_{N-1}$ séparés d'un **pas de temps** Δt ($t_n = n\,\Delta t$), en cherchant à ce que la valeur obtenue numériquement θ_n soit aussi proche que possible de ce que donnerait la solution analytique $\theta(t_n)$.

En pratique, il faut transformer l'équation différentielle en une relation de récurrence permettant de calculer θ_{n+1} à partir uniquement de ce que l'on connaît, c'est-à-dire la grandeur aux instants passés $\theta_n, \theta_{n-1}, ...$, les paramètres caractéristiques du système, et un éventuel forçage. La « recette » pour passer de l'équation différentielle à la relation de récurrence est appelée **schéma numérique**.

- **Schéma d'Euler explicite**

Le schéma d'Euler consiste à approximer la dérivée par un taux d'accroissement entre les instants t_n et t_{n+1}, et à prendre toutes les autres grandeurs à l'instant t_n.

$\rightsquigarrow$ comment le transposer à une équation du second ordre ?

Pour résoudre par la méthode d'Euler une équation différentielle d'ordre 2,
on se ramène à un système différentiel du premier ordre
en introduisant une fonction « inconnue » Ω égale à la dérivée première $\dot{\theta}$.

On établit alors des relations de récurrence par application du schéma d'Euler explicite à ce système.

Application au pendule simple :

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Espace 15

III.C.2 - Implémentation Python

Application 4 : Implémentation Python

Compléter les éléments manquants du code ci-dessous permettant de résoudre numériquement l'équation du mouvement d'un pendule simple de période propre $T_0 = 1$ s avec un pas de temps $\Delta t = 10^{-4}$ s. Le pendule est supposé lâché sans vitesse d'une position initiale $\theta_0 = \pi/6$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

### PARAMÈTRES PHYSIQUES
T0 = 1 # s période propre du pendule
w0 = 2*np.pi/T0 # rad.s-1

### PARAMÈTRES DE SIMULATION
dt = 1e-4 # s pas de temps
N = int(3*T0/dt) # nombre de pas de temps pdt 3 périodes

### INITIALISATION DE LISTES DE LONGUEUR N
t = # à compléter
theta = # à compléter
Omega = # à compléter

### RELATION DE RÉCURRENCE
theta[0] = np.pi/6 # rad
Omega[0] = 0 # rad.s-1

for n in range( # à compléter ):
    # à compléter

### AFFICHAGE
plt.figure()
plt.plot(t,theta)
plt.xlabel('t (s)')
plt.ylabel('theta (rad)')
plt.show()
```

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

III.C.3 - Analyse des résultats

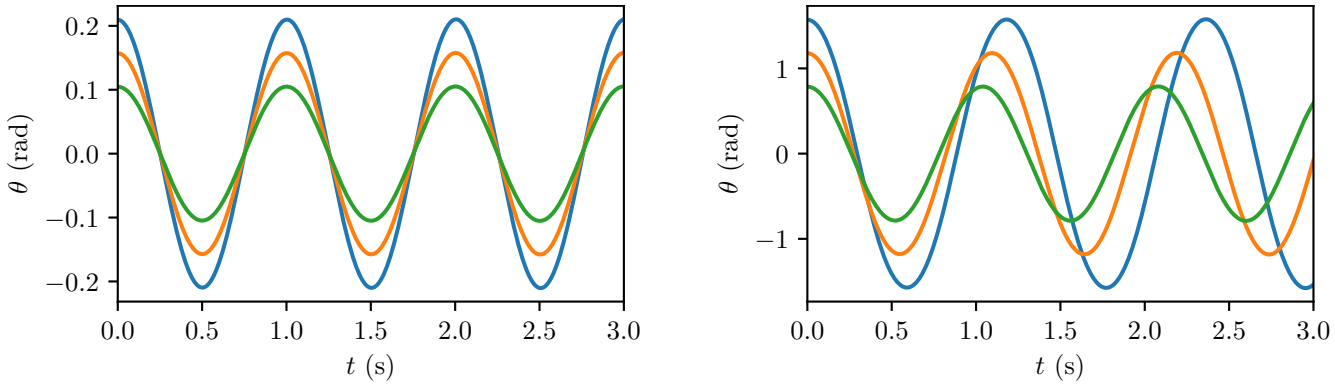


Figure 2 – Petites et grandes oscillations d'un pendule simple. Attention, l'échelle verticale n'est pas la même sur les deux figures !

Observation : La période des petites oscillations ne dépend pas de leur amplitude, alors que la période des grandes oscillations augmente avec leur amplitude. Cette propriété porte le nom d'**isochronisme des petites oscillations**, elle est caractéristique d'oscillations non-linéaires. La transition entre « petites » et « grandes » oscillations est évidemment progressive, mais on peut retenir qu'elle a lieu pour $\theta \simeq 20°$.

➽ **Pour approfondir :** Il est possible d'en dire davantage par une approche analytique. Relions la période des oscillations à leur amplitude. En mutlipliant l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$, on obtient

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\dot{\theta}\sin\theta = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - {\omega_0}^2\cos\theta\right) = 0\,.$$

La fonction dans la dérivée est donc une constante, qui peut s'exprimer en raisonnant sur le point de rebroussement du pendule, où θ est maximal égal à l'amplitude θ_m et $\dot{\theta} = 0$,

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - {\omega_0}^2\cos\theta = -{\omega_0}^2\cos\theta_\mathrm{m}\,.$$

On en déduit

$$\dot{\theta} = \pm\omega_0\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_\mathrm{m})}\,.$$

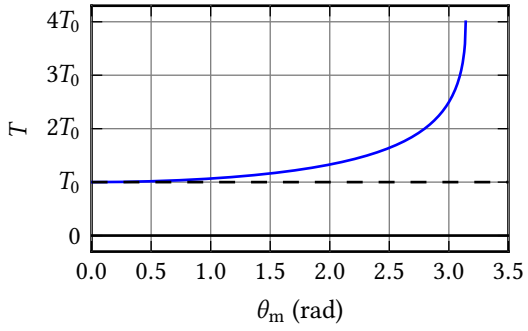
Intégrons alors par séparation des variables sur le quart de période où θ passe de 0 à θ_m avec $\dot{\theta} \geq 0$:

$$\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_\mathrm{m})}} = \int_0^{T/4} \omega_0 \mathrm{d}t$$

En introduisant $T_0 = 2\pi/\omega_0$ la période propre observée dans la limite des petites oscillations, on en déduit

$$T = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^{\theta_\mathrm{m}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_\mathrm{m})}} \simeq \frac{4T_0}{\left(1 + \sqrt{\cos\dfrac{\theta_\mathrm{m}}{2}}\right)^2}$$

L'intégrale ne peut pas s'exprimer de façon exacte à partir de fonctions simples : seule une approximation [1] ou une évaluation numérique peuvent en être données, représentées sur la courbe ci-dessous.



On constate que la période T tend vers T_0 lorsque l'amplitude $\theta_\mathrm{m} \to 0$, conformément à l'étude analytique des petites oscillations, et qu'elle demeure inférieure à $4T_0$ en toute circonstance puisque θ_m ne peut dépasser π. ■

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

III.D - Résolution analytique dans la limite des petites oscillations

M

Application 5 : Petites oscillations du pendule simple

Simplifier l'équation du mouvement pour les petites oscillations, et la résoudre pour des conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = \Omega_0$. Retrouver la propriété d'isochronisme.

1. Plus de détails calculatoires ici : `https://femto-physique.fr/mecanique/periode-pendule-simple.php`

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr