Correction

Réflexion, réfraction

Miroir plan

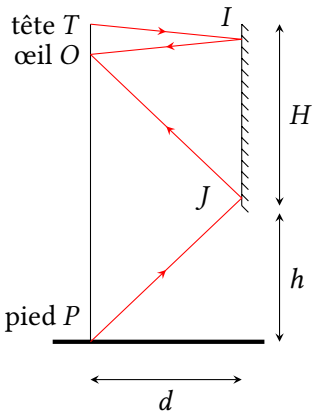
Exercice 1 : Hauteur d'un miroir

oral CCINP MP | 2 | 1 |

▹ *Miroir plan.*

> *Le corrigé que je vous propose donne un raisonnement en termes de rayons lumineux qui se réfléchissent sur le miroir. Un raisonnement en termes d'image par le miroir est possible également.*

Tout au long de l'exercice, on note z les hauteurs orientées vers le haut et comptées à partir du sol.



Pour que l'homme puisse se voir en entier, il faut qu'un rayon issu du haut de sa tête T puisse entrer dans son œil O et même pour son pied P. D'après les lois de la réflexion, ces rayons doivent se réfléchir sur le miroir aux points I et J. Il est donc évident que ces points doivent appartenir au miroir, et donc que

$$z_I \leq h + H \qquad \text{et} \qquad z_J > h$$

Les lois de la réflexion impliquent que les triangles OJP et TIO sont isocèles, et donc

$$z_I = \frac{z_T + z_O}{2} \qquad \text{et} \qquad z_J = \frac{z_P + z_O}{2}$$

> *Cette condition peut aussi se retrouver en raisonnant sur l'image de l'homme dans le miroir, qui est son symétrique. Le théorème de Thalès donne alors le résultat.*

Ainsi les conditions deviennent

$$\boxed{h + H \geq \frac{z_T + z_O}{2} = 175\,\text{cm} \qquad \text{et} \qquad h < \frac{z_P + z_O}{2} = 85\,\text{cm}}$$

Ainsi, le bas du miroir doit être à une hauteur inférieure à 85 cm du sol alors que le haut du miroir doit lui être à une hauteur supérieure à 175 cm du sol pour que l'homme s'y voie entièrement. Si le bas du miroir est à la distance maximale du sol, la hauteur minimale du miroir est de 90 cm.

Les conditions ne dépendent pas de la distance d au miroir : **que l'homme se recule ou s'avance, il n'a pas plus de chances de se voir en entier** qu'en restant sur place.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

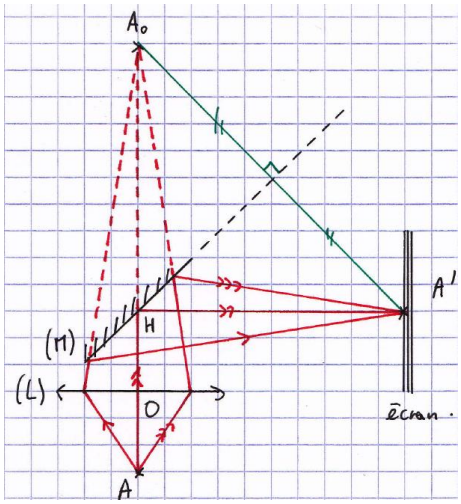
Exercice 2 : Rétroprojecteur

2 | 2

- *Miroir plan ;*
- *Instrument d'optique.*

Commençons par un schéma de principe, sans chercher à respecter les échelles. Notons O le centre optique de la lentille et H le centre du miroir. Le transparent sert d'objet au système optique composé de la lentille convergente (L) et du miroir (M). Notons A un point objet au centre du transparent. La conjugaison se traduit comme suit :

$$A \in \text{transparent} \overset{\text{(L)}}{\longmapsto} A_0 \overset{\text{(M)}}{\longmapsto} A' \in \text{écran}\,.$$



L'énoncé indique les distances absolues

$$OH = 15\,\text{cm} \qquad \text{et} \qquad HA' = 3\,\text{m}\,.$$

1 D'après la loi de conjugaison écrite ci-dessus, A' est l'image de A_0 par le miroir, c'est-à-dire son symétrique par rapport au miroir. Par conséquent, le miroir est le plan médiateur du segment A_0A' : tout point situé sur le miroir est à égale distance de A_0 et A'. En particulier $A_0H = HA'$ et donc

$$OA_0 = OH + HA' = 3{,}15\,\text{m}\,.$$

Or la distance OA_0 est reliée à la distance OA par la relation de conjugaison de Newton,

$$\frac{1}{\overline{OA_0}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

En remplaçant les distances algébriques le long de l'axe vertical par les distances absolues, cela donne

$$\frac{1}{OA_0} + \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{OA = \frac{OA_0\,f'}{OA_0 - f'} = 33\,\text{cm}\,.}$$

2 Il s'agit maintenant de calculer le grandissement γ du système, ou plus précisémment sa valeur absolue. Comme un miroir plan a un grandissement de 1, il suffit de connaître celui de la lentille. Ainsi,

$$|\gamma| = \frac{OA_0}{OA} = 9{,}5\,,$$

d'où on déduit que **la lettre mesure 4,8 cm sur l'écran**.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Lois de la réfraction

Exercice 3 : Distance apparente à travers un dioptre

oral banque PT | 2 | 1 |

- *Formation d'image optique ;*
- *Loi de la réfraction.*

1 L'image A' est par définition le point d'intersection des rayons issus de A et traversant le dioptre. Un rayon évident est confondu avec l'axe (zz'), l'autre s'obtient par application de la loi de la réfraction, voir figure 1, sachant que comme $n > n'$ alors $i < i'$. On constate que ces rayons ne se coupent pas à droite du dioptre, mais leur prolongement se coupe côté gauche. L'image A' est donc virtuelle.

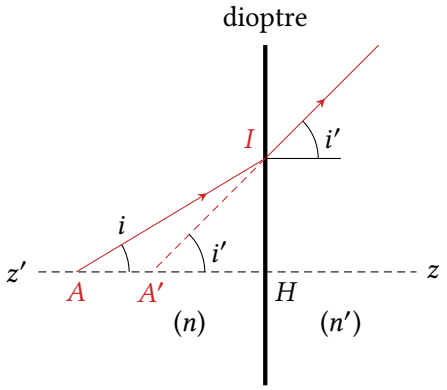


Figure 1 – Image à travers un dioptre.

2 En raisonnant dans les triangles rectangle AHI et $A'HI$, on obtient

$$\tan i = \frac{IH}{AH} \qquad \text{et} \qquad \tan i' = \frac{IH}{A'H}$$

d'où on déduit par identification des expressions de IH

$$\boxed{AH \tan i = A'H \tan i' .}$$

Dans l'hypothèse des petits angles, la relation précédente devient

$$AH\, i = A'H\, i' \qquad \text{soit} \qquad A'H = \frac{i}{i'} AH$$

et la loi de la réfraction s'écrit

$$n \sin i = n' \sin i' \qquad \text{soit} \qquad ni = n'i' \qquad \text{et} \qquad \frac{i}{i'} = \frac{n'}{n},$$

ce qui permet d'obtenir

$$\boxed{A'H = \frac{n'}{n} AH .}$$

On constate que le dioptre n'est pas stigmatique en général, puisque la position du point A' dépend des angles et donc des rayons utilisés pour la calculer. En revanche, il le devient dans l'approximation des petits angles. S'agissant d'une approximation, le dioptre n'est alors qu'*approximativement* stigmatique.

> *Notons que cela n'a rien de très surprenant : c'est l'essence des conditions de Gauss, qui sont nécessaires au stigmatisme de la quasi-totalité des systèmes optiques. Le miroir plan est la seule exception.*

3 On note A le poisson, A' son image par le dioptre eau/verre et A'' l'image finale, qui est l'image de A' par le dioptre verre/air. H est le projeté orthogonal de A sur le dioptre eau/verre et H' celui sur le dioptre verre/air. La distance cherchée est $A''H'$, qui est la distance apparente à partir du dioptre verre/air.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

D'après la question précédente,

$$A'H = \frac{n_{\text{verre}}}{n_{\text{eau}}} AH = 5{,}6\text{ cm}.$$

On en déduit

$$A'H' = A'H + e = 6{,}4\text{ cm}$$

puis

$$A''H' = \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{verre}}} A'H' = 4{,}3\text{ cm}\,.$$

Ainsi, le poisson **semble se trouver à 4,3 cm en arrière du dioptre air-verre** alors qu'il se trouve en réalité à 5,8 cm.

Exercice 4 : Réfractomètre à fils

1 | 1

- *Loi de la réfraction ;*
- *Miroir plan.*

On commence par un beau schéma, figure 2. Les rayons arrivant dans l'œil de l'observateur sont alors celui issu du fil A_2 et celui issu de A_1 qui se réfléchit au fond de la cuve puis qui est réfracté. Pour construire ce rayon, on peut par exemple s'aide de l'image A_1' de A_1 par le miroir.

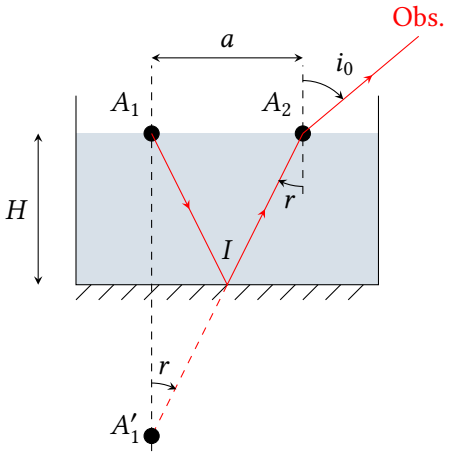


Figure 2 – Principe de fonctionnement du réfractomètre à fils.

Les images des deux fils se superposent si le rayon réfléchi puis réfracté se superpose avec le rayon émis par A_2, donc si l'angle de réfraction est égal à i_0. D'après la loi des sinus,

$$1 \times \sin i_0 = n \sin r$$

On voit géométriquement (sinus puis Pythagore en raisonnant dans le triangle rectanlge $A_1A_2A_1'$) que

$$\sin r = \frac{A_1A_2}{A_1'A_2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (2H)^2}}$$

On en déduit finalement

$$n = \frac{\sin i_0}{\sin r} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{n = \sqrt{1 + \frac{4H^2}{a^2}} \sin i_0\,.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 5 : Détecteur de pluie sur un pare-brise

mutiples concours | 1 | 2 |

- *Loi de la réfraction ;*
- *Réflexion totale ;*
- *Géométrie dans un triangle.*

1 Un rayonnement infrarouge a l'avantage d'être invisible. Utiliser une longueur d'onde visible ferait un peu trop tuning ... et surtout risquerait de gêner la conduite, notamment des autres véhicules.

2 La somme des angles (non orientés) dans le triangle HIJ de la figure 3 est donnée par

$$\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi \qquad \text{soit} \qquad \alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \frac{\pi}{2} = \pi \qquad \text{et} \qquad \alpha + \pi - \theta = \pi \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\theta = \alpha}$$

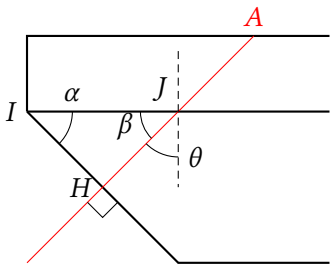


Figure 3 – Détermination de l'angle d'incidence à l'interface plexiglas verre.

> *Pour retrouver (ou se convaincre) que $\beta = \pi/2 - \theta$ on peut tester les cas limites $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.*

3 Le verre étant plus réfringent que l'air ($n_v > n_a$), il peut y avoir réflexion totale à l'interface verre → air. L'angle d'incidence limite θ_{lim} au delà duquel la réflexion totale a lieu est tel que

$$\theta_{lim} = \arcsin \frac{n_a}{n_v} = 40{,}2^\circ .$$

Or l'angle d'incidence du rayon dans le verre en A est égal à $\theta > \theta_{lim}$. De plus, l'application successive de la loi de la réflexion en A puis en B (on néglige la réfraction à l'interface verre–plexiglas) indique que l'angle d'incidence en C est également θ. Le résultat se généralise donc : **il y a réflexion totale à toutes les interfaces verre → air.**

4 En présence de pluie, l'interface extérieure du pare-brise n'est plus verre → air mais verre → eau. Dans ce cas, l'angle limite donnant lieu à une réflexion totale vaut

$$\theta'_{lim} = \arcsin \frac{n_e}{n_v} = 59{,}1^\circ .$$

Cette fois, $\theta < \theta'_{lim}$, **un rayon est donc transmis vers l'extérieur du pare-brise lorsqu'il est mouillé.**

5 On a raisonné jusqu'ici sur un seul rayon lumineux. En pratique, d'une part la DEL émet un pinceau lumineux, d'autre part celui-ci se réflechit plusieurs fois sur la face extérieure du pare-brise. Cela permet de tester la présence d'eau sur une surface plus étendue du pare-brise. Plus l'intensité reçue par le photocapteur est faible, plus il y a de « fuites » de lumière à cause de l'eau, et plus les essuies-glace doivent balayer rapidement.

> *Ne pas oublier que le rayon réfléchi existe toujours, même lorsqu'il y a réfraction. Le capteur reçoit donc toujours une intensité lumineuse non nulle.*

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 6 : Réfractomètre d'Abbe

2 | 2 |

- *Loi de la réfraction ;*
- *Réflexion totale ;*
- *Géométrie dans un triangle.*

1 Compte tenu des symétries du dispositif, le principe du retour inverse de la lumière garantit que si le rayon sort du réfractomètre par la face CD alors **l'angle d'émergence vaut i**. En effet,
- à l'interface AB, la loi de la réfraction donne l'angle d'émergence dans le prisme, noté i_1 ;
- la géométrie du prisme donne l'angle d'incidence sur la première interface BD, noté i_2 ;
- sur cette interface, la loi de la réfraction donne l'angle d'émergence dans le liquide, noté i_3 ;
- comme les deux interfaces BD sont parallèles, alors l'angle d'incidence sur la deuxième interface BD vaut nécessairement i_3 ;
- la même loi de Descartes que précédemment permet d'en déduire que l'angle d'émergence dans le prisme vaut alors forcément i_2 ;
- les deux prismes étant identiques, l'angle d'incidence sur l'interface CD est alors nécessairement i_1 ;
- et par conséquent, la même loi de Descartes qu'à l'interface AB indique que l'angle d'émergence dans l'air par la face CD vaut i.

2 Si le rayon transmis sort par la face AD, c'est qu'il a subi une réflexion totale. Cette réflexion totale ne peut avoir eu lieu qu'à l'interface BD dans le sens prisme $\longrightarrow$ liquide, à condition que $n < n_0$. En effet, si elle avait lieu dans le sens liquide $\longrightarrow$ prisme le faisceau serait guidé dans le liquide le long de l'interstice entre les deux prismes. Comme l'angle critique de réflexion totale dépend du rapport des indices des deux milieux, ici n_0 et n, il est possible d'en déduire la valeur de n.

3 Commençons par introduire les notations sur le schéma figure 4.

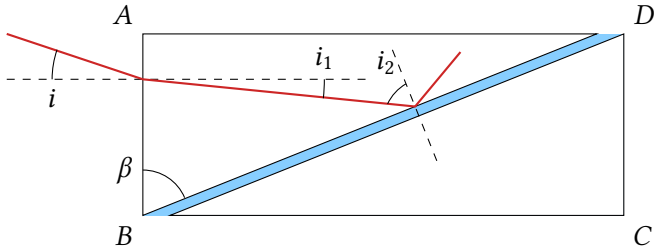


Figure 4 – Réfractomètre d'Abbe.

À la limite de la réflexion totale,

$$i_2 = \arcsin \frac{n}{n_0}$$

Une relation de somme des angles permet d'en déduire i_1, puisque

$$\beta + \left(\frac{\pi}{2} - i_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - i_2\right) = \pi \qquad \text{d'où} \qquad i_1 = \beta - i_2$$

Enfin, la seconde loi de Descartes exprimée à l'interface AB donne

$$1 \times \sin i = n_0 \sin i_1 \qquad \text{soit} \qquad \sin i = n_0 \sin\left(\beta - \arcsin \frac{n}{n_0}\right)$$

Remonter à n demande d'inverser cette relation, soit

$$\boxed{n = n_0 \sin\left(\beta - \arcsin \frac{\sin i}{n_0}\right) = 1{,}32}$$

4 Une première limitation évidente est qu'**un réfractomètre d'Abbe ne permet de mesurer que des indices de liquides**, voire de gaz en prenant des précautions pour empêcher les fuites, mais en aucun cas de solides. Par ailleurs, comme il repose sur une réflexion totale, **il faut que l'indice du liquide soit inférieur à celui du verre composant les prismes**.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 7 : Micro-bille pour marquage routier

2 | 2 |

- *Lois de Descartes ;*
- *Géométrie dans un triangle.*

1 Par application successive des lois de Descartes à l'entrée, à la réflexion, et à la sortie de la bille, on vérifie bien que $i = j$.

2 **Méthode 1 :** le théorème de l'angle au centre donne directement $\boxed{i = \dfrac{i'}{2}}$.

Méthode 2 : en raisonnant dans le triangle ABC,

$$\alpha + i' + \frac{\pi}{2} = \pi\,,$$

et dans le triangle OAC,

$$(\alpha - i') + i + \frac{\pi}{2} = \pi\,.$$

On retrouve le résultat p.ex. en soustrayant les deux égalités.

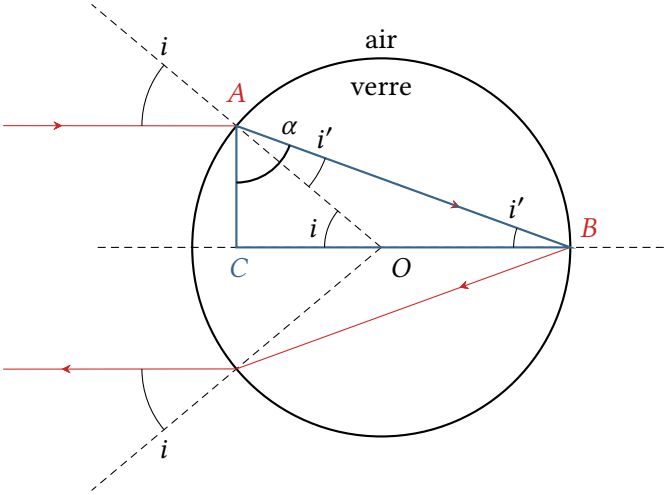


Figure 5 – Réflexion sur une mirco-bille, schéma des notations.

3 Développement limité de la loi de Descartes :

$$\sin i = n \sin\frac{i}{2} \qquad \text{soit} \qquad i = n\frac{i}{2} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{n = 2\,.}$$

4 Idem sauf qu'il y a de l'eau et plus de l'air, tous les raisonnements restent inchangés hormis la loi de Descartes qui donne désormais

$$n_{\text{eau}}\, i = n'\frac{i}{2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{n' = 2n_{\text{eau}} = 2{,}66\,.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

Exercice 8 : Physics is fun

2 | 3

- *Loi de la réfraction ;*
- *Géométrie dans un triangle.*

1 Raisonnons dans le triangle SKI. On a alors

$$IK = SI\,\sin(\alpha - \beta)$$

et comme $SI = d/\cos\beta$,

$$\delta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta} d\,.$$

2 Développons le sinus,

$$\delta = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\cos\beta} d = \left(\sin\alpha - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cos\alpha\right) d\,.$$

Pour faire disparaître β, on utilise la loi de la réfraction ... et pour une fois reconnaître tan β n'est pas le plus efficace. On néglige la déviation par le verre de la vitre de la piscine, et on raisonne comme s'il existait une interface air-eau. L'angle d'incidence du rayon violet passant dans l'eau est ainsi égal à β, et en supposant les rayons parallèles après réfraction (≃ photo prise à grande distance de la piscine), l'angle de réfraction est égal à α. Ainsi, en notant n l'indice de l'eau,

$$n\sin\beta = 1\times\sin\alpha \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} \sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{n} \\ \cos\beta = \sqrt{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{n^2}} \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$\boxed{\delta = \left(1 - \frac{\cos\alpha}{n\sqrt{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{n^2}}}\right)\sin\alpha\, d\,.}$$

Il n'y a plus de simplification franchement gagnante, on peut donc s'arrêter là.

3 Pas évident d'estimer les valeurs numériques : prenons $\alpha = 45°$ et $d = 1\,\text{m}$. On trouve alors

$$\delta = 25\,\text{cm}\,,$$

ce qui est une déviation importante mais probablement inférieure à celle observée sur la photo. Toutefois, si l'on prend $\alpha = 60°$ et $d = 1{,}5\,\text{m}$, ce qui pourrait être plausible également, on trouve $\delta = 65\,\text{cm}$, ce qui est plus en accord avec la photo. En conclusion, il est **plausible que la photo soit authentique**.

Fibre optique

Exercice 9 : Bande passante d'une fibre optique

2 | 2

- *Fibre optique à saut d'indice ;*
- *Débit binaire.*

1 Comme le montre la figure 6, en imaginant « déplier » le rayon incliné d'un angle θ, la longueur ℓ' réellement parcourue dans la fibre est telle que

$$\cos\theta = \frac{\ell}{\ell'} \qquad \text{d'où} \qquad \ell' = \frac{\ell}{\cos\theta}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

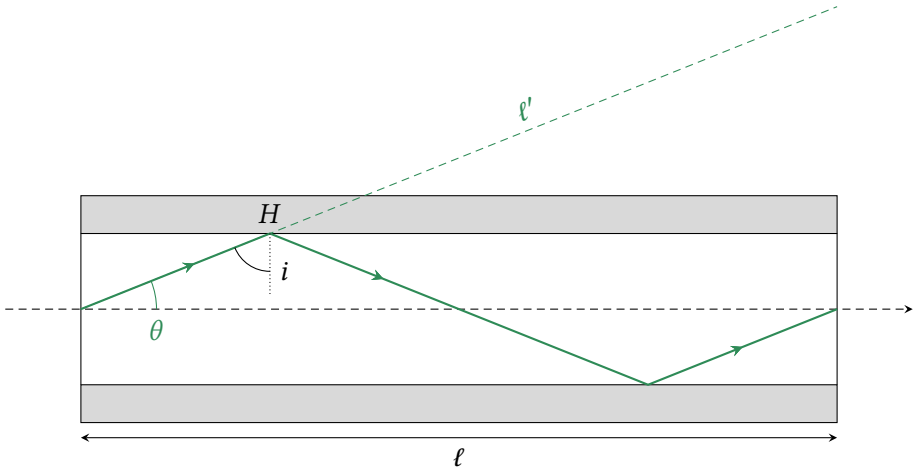


Figure 6 – Trajet dans la fibre d'un rayon incliné.

d'où on déduit le temps de propagation

$$\tau(\theta) = \frac{\ell'}{c/n} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\tau(\theta) = \frac{n\ell}{c\cos\theta}\,.}$$

2 Pour que l'énergie lumineuse reste à l'intérieur de la fibre, il faut qu'il y ait réflexion totale en H. Sachant que $n' < n$, c'est le cas si

$$\sin i > \frac{n'}{n} = \sin i_{\text{lim}}$$

> *Il ne serait pas inutile de connaître cette expression, mais elle peut aussi se retrouver rapidement en se rappelant que l'angle limite est associé à une émergence rasante ($i' = \pi/2$) :*
>
> $$n \sin i_{lim} = n' \sin\frac{\pi}{2} \qquad d'où \qquad \sin i_{lim} = \frac{n'}{n}\,.$$

En utilisant la somme des angles d'un triangle, on en déduit

$$\theta + i + \frac{\pi}{2} = \pi \qquad \text{soit} \qquad i = \frac{\pi}{2} - \theta\,,$$

d'où on déduit l'inclinaison maximale en utilisant $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

$$\boxed{\cos\theta_{\text{max}} = \frac{n'}{n}\,.}$$

3 Tous les rayons ne mettent pas la même durée à traverser la fibre. Si l'impulsion est suffisamment courte en entrée, sa largeur en sortie peut être estimée comme la différence de temps de parcours entre le rayon le plus lent ($\theta = \theta_{\text{max}}$) et le plus rapide ($\theta = 0$) :

$$\begin{aligned}\delta t &= \frac{n\ell}{c \times \dfrac{n'}{n}} - \frac{n\ell}{c \times 1} \\ &= \frac{n\ell}{c}\left(\frac{n}{n'} - 1\right) \\ &= \frac{n\ell}{c}\left(\frac{1}{1-\Delta} - 1\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\delta t = \frac{n\ell}{c}\frac{\Delta}{1-\Delta}\,.}$$

Puisque $\Delta \ll 1$, on peut approximer

$$\boxed{\delta t = \frac{n\ell}{c}\Delta\,.}$$

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

> *Attention, le fait que Δ soit petit permet de le négliger au dénominateur (dans le somme), mais pas au numérateur où il intervient dans un produit. En prenant un exemple numérique pour bien voir,*
>
> $$2 + 1 \cdot 10^{-5} \simeq 2 \qquad \textit{mais} \qquad 2 \times 1 \cdot 10^{-5} \simeq 2 \cdot 10^{-5} \ll 2 \,.$$

4 Pour que deux impulsions soient discernables en sortie de fibre, il faut que la durée T qui les sépare soit plus grande que leur largeur δt,

$$T > \delta t \qquad \text{soit} \qquad f = \frac{1}{T} < \frac{1}{\delta t} = \frac{c}{n\ell\Delta}$$

La valeur seuil définit la bande passante,

$$\boxed{B = \frac{c}{n\ell\Delta} \,.}$$

5 Pour que la bande passante soit supérieure à la valeur voulue $B_0 = 1\,\text{Gbit} \cdot \text{s}^{-1} = 1 \cdot 10^9\,\text{bit} \cdot \text{s}^{-1}$, il faut avoir

$$\boxed{\Delta < \frac{c}{n\ell B_0} = 0{,}1 \,.}$$

Exercice 10 : Courbure d'une fibre optique

2 | 2

- *Fibre optique à saut d'indice ;*
- *Géométrie dans un triangle.*

En raison de la courbure, les rayons peuvent arriver sur la gaine avec un angle d'incidence trop élevé. On constate sur la figure 7 que c'est au point I que l'angle d'incidence est minimal, tel que

$$\sin i = \frac{R}{R + 2r} \,.$$

Pour que le rayon reste guidé dans la fibre, il faut avoir

$$\sin i > \frac{n_\text{g}}{n_\text{c}} \qquad \text{soit} \qquad R > \frac{n_\text{g}}{n_\text{c}}(R + 2r)$$

ce qui conduit à

$$R > 2\frac{n_\text{g}/n_\text{c}}{1 - n_\text{g}/n_\text{c}} r = 7{,}5\,\text{cm} \,.$$

Les fibres optiques réellement utilisées ne sont pas à saut d'indice mais à gradient d'indice (l'indice varie de manière continue au sein du cœur), la valeur ne coïncide donc pas vraiment avec la préconisation du constructeur, mais l'ordre de grandeur obtenu reste néanmoins pertinent.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr

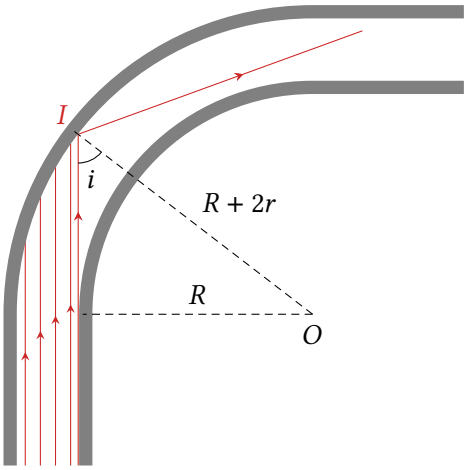


Figure 7 – Trajet des rayons dans une fibre optique courbée.

BY-NC-SA

© Étienne Thibierge, www.etienne-thibierge.fr