

Machines thermodynamiques

Machines à pistons

Exercice 1 : Moteur à quatre temps

oral CCINP PSI |  2 |  2 | 

- Machine à pistons ;
- Gaz parfait.

1 Les transformations s'identifient aisément à partir des variations de volume, et en vérifiant la compatibilité raisonnable avec les variations de pression :

A-B : admission B-C : compression C-E : combustion E-A : échappement.

2 L'aire d'un cycle moteur dans le diagramme de Watt correspond au travail $|W|$ libéré au cours du cycle. On constate qu'il y a ici deux « boucles » dans ce cycle : un travail moteur est produit lors des étapes de compression et combustion, mais un travail résistant est consommé lors du renouvellement du mélange gazeux. Ce n'est pas surprenant, car ce renouvellement nécessite de repousser les gaz préalablement contenus dans le moteur.

3 On introduit le point D comme étant celui auquel la pression est maximale, voir figure 1. On peut alors adopter les modélisations suivantes :

A-B : isobare B-C : adiabatique réversible C-D : isochore D-E : adiabatique réversible
E-B : isochore (chute de pression dès que la soupape d'échappement s'ouvre) B-A : isobare

Les équations des branches se déterminent directement pour les isobares et isochores, et en utilisant la loi de Laplace pour les adiabatiques réversibles. Ainsi,

- A-B : $P = P_A$;
- B-C : $PV^\gamma = \text{cte}$ soit $P = \frac{P_B V_2^\gamma}{V^\gamma}$;
- C-D : $V = V_1$;
- D-E : $PV^\gamma = \text{cte}$ soit $P = \frac{P_D V_1^\gamma}{V^\gamma}$;
- E-B : $V = V_2$;
- B-A : $P = P_A$.

4 Par définition, le rendement du moteur est défini à partir du travail total W_{tot} et du transfert thermique total $Q_{\text{c,tot}}$ échangé avec la source chaude,

$$\eta = -\frac{W_{\text{tot}}}{Q_{\text{c,tot}}} = -\frac{W_{BC} + W_{DE}}{Q_{CD}}$$

car il n'y a pas d'échange de travail lors des isochores et Q_{EB} se fait avec l'extérieur et n'est donc pas coûteux. D'après le premier principe appliqué au gaz sur le cycle,

$$W_{BC} + W_{DE} + Q_{CD} + Q_{EB} = 0 \quad \text{d'où} \quad \eta = \frac{Q_{CD} + Q_{EB}}{Q_{CD}} = 1 + \frac{Q_{EB}}{Q_{CD}}.$$

Comme $Q_{EB} < 0$ on a bien $\eta < 1$.

5 Au cours de l'isochore C-D, d'après le premier principe appliqué au gaz contenu dans le cylindre de combustion,

$$\Delta U_{CD} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er ppe}}}{=} Q_{CD} + 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} C_V (T_D - T_C)$$

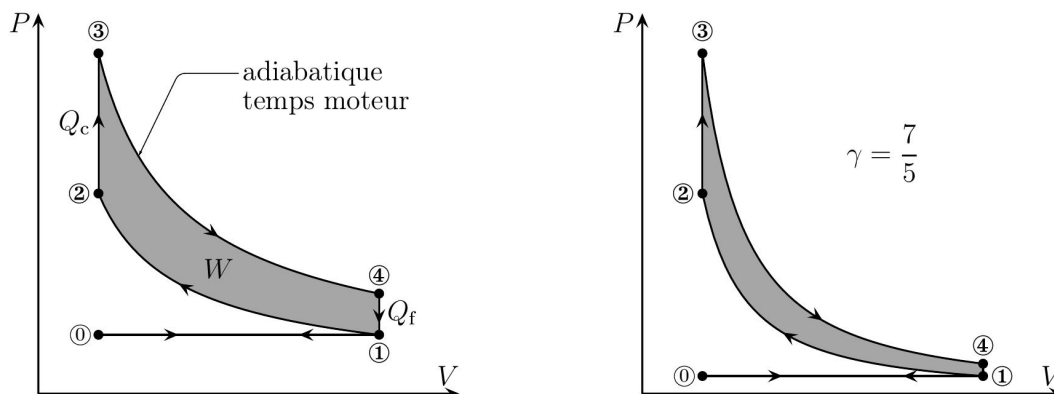


Figure 1 – Représentation du cycle de Beau de Rochas dans le diagramme de Watt. Le diagramme de gauche est déformé pour mieux visualiser le cycle, mais le diagramme de droite correspond au cycle d'un gaz parfait diatomique représenté à l'échelle. En revanche, les notations ne correspondent pas à celles de l'énoncé. Figure extraite du cours en ligne de Matthieu Rigaut.

et de même, au cours de l'isochore E-B,

$$Q_{EB} = C_V (T_B - T_E) .$$

On en déduit alors

$$\eta = 1 + \frac{T_B - T_E}{T_D - T_C} .$$

Pour passer aux volumes, la loi des gaz parfaits n'apporte rien car elle fait intervenir les pressions, qui ne sont pas plus connues que les températures. Il vaut mieux appliquer la loi de Laplace sous la forme $TV^{\gamma-1} = \text{cte}$ sur les adiabatiques et ensuite simplifier. On a alors, avec $\alpha = V_2/V_1$,

$$\begin{cases} T_B V_2^{\gamma-1} = T_C V_1^{\gamma-1} \\ T_D V_1^{\gamma-1} = T_E V_2^{\gamma-1} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} T_C = T_B \alpha^{\gamma-1} \\ T_D = T_E \alpha^{\gamma-1} \end{cases}$$

On réécrit alors le rendement

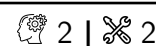
$$\eta = 1 - \frac{T_E - T_B}{T_E \alpha^{\gamma-1} - T_B \alpha^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}$$

d'où on conclut finalement

$$\eta = 1 - \alpha^{1-\gamma} .$$

Comme $\gamma > 1$, il faut choisir un rapport de compression élevé pour optimiser le rendement du cycle ... mais des limitations technologiques, notamment sur l'auto-inflammation du carburant qu'il faut éviter, imposent de limiter $\alpha \lesssim 10$.

Exercice 2 : Moteur de Stirling



- Machine à pistons ;
- Gaz parfait.

- 1 Faire le schéma. Le cycle est parcouru dans le sens horaire, il s'agit donc d'un cycle **moteur**.
- 2 • **Transformation 1 → 2** : isotherme, donc

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{1 \rightarrow 2} P dV = - \int_{1 \rightarrow 2} nRT_f \frac{dV}{V} \quad \text{d'où} \quad W_{1 \rightarrow 2} = -nRT_f \ln \frac{V_2}{V_1} .$$

Le bilan d'énergie interne s'écrit

$$\Delta_{1 \rightarrow 2} U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} Q_{1 \rightarrow 2} + W_{1 \rightarrow 2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{GP isoT}}}{=} 0 \quad \text{donc} \quad Q_{1 \rightarrow 2} = -W_{1 \rightarrow 2} \quad \text{soit} \quad Q_{1 \rightarrow 2} = nRT_f \ln \frac{V_2}{V_1} .$$

- **Transformation 2 → 3** : isochore, donc

$$W_{2 \rightarrow 3} = 0$$

et ainsi

$$\Delta_{2 \rightarrow 3} U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} Q_{2 \rightarrow 3} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{GP}}}{=} C_V (T_3 - T_2) \quad \text{d'où} \quad Q_{2 \rightarrow 3} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_c - T_f).$$

- **Transformation 3 → 4** : isotherme également, donc

$$W_{3 \rightarrow 4} = -nRT_c \ln \frac{V_1}{V_2} \quad \text{et} \quad Q_{3 \rightarrow 4} = nRT_c \ln \frac{V_1}{V_2}.$$

- **Transformation 4 → 1** : de nouveau isochore, d'où

$$W_{4 \rightarrow 1} = 0 \quad \text{et} \quad Q_{4 \rightarrow 1} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_f - T_c).$$

Pour s'assurer qu'il n'y a pas d'erreur de calcul, on peut vérifier que la somme (algébrique) des énergies reçues par le système est nulle, conformément au premier principe appliqué à l'ensemble du cycle.

Le travail total échangé au cours du cycle vaut

$$W = W_{1 \rightarrow 2} + W_{3 \rightarrow 4} = nR(T_c - T_f) \ln \frac{V_2}{V_1} < 0$$

car $V_2 < V_1$. Sur l'ensemble du cycle, le gaz fournit du travail, il s'agit donc bien d'un cycle moteur.

3 La production énergétique du système est le travail total $W = W_{1 \rightarrow 2} + W_{3 \rightarrow 4} < 0$ qu'il fournit. Le coût est le transfert thermique qu'il reçoit de la source chaude, $Q_c = Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} > 0$. Le rendement est donc défini par

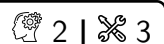
$$\eta = \left| \frac{W}{Q_c} \right| = -\frac{W_{1 \rightarrow 2} + W_{3 \rightarrow 4}}{Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4}} \quad \text{d'où} \quad \eta = \frac{(T_c - T_f) \ln \frac{V_1}{V_2}}{\frac{1}{\gamma - 1} (T_c - T_f) + T_c \ln \frac{V_1}{V_2}} = 0,32.$$

4 Le transfert thermique $Q_{2 \rightarrow 3}$, qui diminue le rendement, est exactement opposé au transfert thermique $Q_{4 \rightarrow 1}$. Plutôt que de perdre le transfert thermique $Q_{4 \rightarrow 1}$ en le cédant à la source froide, l'idée de Stirling consiste à le céder au régénérateur, qui le rendra au gaz lors de l'étape $2 \rightarrow 3$. Ce transfert thermique n'est alors plus fourni par la source chaude, ce qui est plus économique pour un même travail produit.

5 Comme $Q_{2 \rightarrow 3}$ n'est plus fourni par la source chaude, il ne compte plus dans le rendement, qui devient

$$\eta = \left| \frac{W}{Q_c} \right| = -\frac{W_{1 \rightarrow 2} + W_{3 \rightarrow 4}}{Q_{3 \rightarrow 4}} = \frac{T_c - T_f}{T_c} \quad \text{d'où} \quad \eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 0,5.$$

Exercice 3 : Moteur Diesel à double combustion



- ▷ Moteur à pistons ;
- ▷ Gaz parfait.

1 La transformation $1 \rightarrow 2$ est une adiabatique réversible d'un gaz parfait. D'après la loi de Laplace en température et volume, $TV^{\gamma-1} = \text{cte}$, d'où

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \quad \text{soit} \quad T_2 = \beta^{\gamma-1} T_m = 9,1 \cdot 10^2 \text{ K}.$$

La transformation $2 \rightarrow 3$ est isochore, d'où on déduit de l'équation d'état

$$\frac{P_3}{T_3} = \frac{P_2}{T_2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T_2 = \beta^{\gamma-1} T_m \\ P_3 = p_M \\ P_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma P_1 = \beta^\gamma p_m \end{cases}$$

ce qui conduit à

$$T_3 = \frac{p_M}{\beta p_m} T_m = 1,0 \cdot 10^3 \text{ K}.$$

Enfin, la loi de Laplace appliquée sur $4 \rightarrow 5$ qui est adiabatique réversible donne

$$T_5 = \left(\frac{V_4}{V_5}\right)^{\gamma-1} T_4$$

où le volume V_4 s'exprime en fonction de $V_3 = V_m$ par la caractéristique de l'isobare,

$$\frac{V_4}{T_4} = \frac{V_3}{T_3}$$

ce qui donne

$$T_5 = \left(\frac{V_3}{V_5} \frac{T_4}{T_3}\right)^{\gamma-1} T_4 = \left(\frac{1}{\beta} \frac{T_M}{T_m} \frac{\beta p_m}{p_M}\right)^{\gamma-1} T_M \quad \text{donc} \quad T_5 = \left(\frac{T_M p_m}{T_m p_M}\right)^{\gamma-1} T_M = 8,8 \cdot 10^2 \text{ K}.$$

2 Notons n la quantité de matière de gaz du mélange. Le transfert thermique Q_c est fourni au cours des étapes $2 \rightarrow 3$ et $3 \rightarrow 4$. En utilisant d'une part le bilan d'énergie (premier principe) appliquée à $2 \rightarrow 3$ qui est isochore et d'autre part le fait que le système soit un gaz parfait, on trouve

$$\Delta_{2 \rightarrow 3} U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P isoV}}}{=} 0 + Q_{2 \rightarrow 3} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{GP}}}{=} C_V (T_3 - T_2)$$

De même, pour $3 \rightarrow 4$ qui est une isobare sans travail autre que celui des forces de pression apparentes, on obtient

$$\Delta_{3 \rightarrow 4} H \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P isoP}}}{=} 0 + Q_{3 \rightarrow 4} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{GP}}}{=} C_P (T_4 - T_3) = \gamma C_V (T_4 - T_3)$$

Finalement,

$$Q_c = Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} \quad \text{donc} \quad Q_c = C_V [T_3 - T_2 + \gamma(T_4 - T_3)]$$

3 Comme $5 \rightarrow 1$ est une isochore d'un gaz parfait, on a

$$\Delta_{5 \rightarrow 1} U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} 0 + Q_{5 \rightarrow 1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{GP}}}{=} C_V (T_1 - T_5) \quad \text{d'où} \quad Q_f = C_V (T_1 - T_5).$$

4 D'après le premier principe appliqué sur l'ensemble du cycle,

$$\Delta U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} W + Q_c + Q_f \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cycle}}}{=} 0$$

et ainsi

$$W = -C_V [T_3 - T_2 + \gamma(T_4 - T_3)] - C_V (T_1 - T_5)$$

$$W = C_V [T_2 - T_3 + T_5 - T_1 + \gamma(T_3 - T_4)]$$

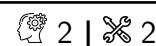
5 Le rendement du moteur est défini par

$$\eta = \left| \frac{W}{Q_c} \right| = -\frac{W}{Q_c} = 63\%.$$

C'est une valeur élevée, mais qui a été obtenue avec une modélisation très idéalisée des transformations. En pratique, l'ordre de grandeur du rendement d'un moteur Diesel performant (typiquement celui d'un bateau, qui permet une grande amplitude de déplacement du piston) est plutôt que 40–45 % et de l'ordre de 30–35 % au mieux pour des moteurs de plus petites tailles où les contraintes d'encombrement l'emportent sur la performance thermodynamique.

Machines à écoulement de fluide

Exercice 4 : Générateur à gaz suivant le cycle de Brayton



- Premier principe industriel ;
- Gaz parfait.

1 Voir figure 2.

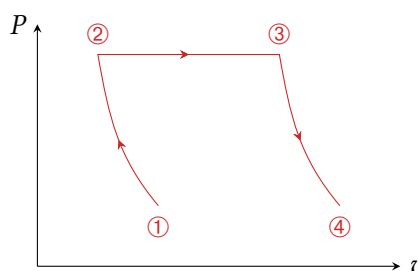


Figure 2 – Cycle de Brayton dans le diagramme de Clapeyron.

2 La loi de Laplace s'écrit

$$TP^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{cte}.$$

Par application à l'étape 1-2,

$$T_2 P_2^{(1-\gamma)/\gamma} = T_1 P_1^{(1-\gamma)/\gamma} \quad \text{d'où} \quad T_2 = \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} T_1 = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} T_1 \quad \text{soit} \quad \boxed{T_2 = \lambda T_1 > T_1}.$$

De même, au cours de l'étape 3-4,

$$T_4 = \left(\frac{P_4}{P_3} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} T_3.$$

Or $P_4 = P_1$, $P_3 = P_2$, et $T_3 = \tau T_1$ donc

$$T_4 = \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \tau T_1 \quad \text{soit} \quad \boxed{T_4 = \frac{1}{\lambda} T_3 = \frac{\tau}{\lambda} T_1}.$$

3 Le passage du gaz dans le compresseur étant rapide, on peut le supposer adiabatique. Ainsi,

$$h_2 - h_1 = w_c + \underbrace{q_{12}}_{=0} \quad \text{donc} \quad w_c = h_2 - h_1 = c_P(T_2 - T_1) = c_P(\lambda T_1 - T_1),$$

d'où

$$\boxed{w_c = c_P(\lambda - 1)T_1}.$$

Le premier principe industriel appliqué à la chambre de combustion donne

$$h_3 - h_2 = q_c + \underbrace{w_{23}}_{=0} \quad \text{d'où} \quad q_c = h_3 - h_2 = c_P(T_3 - T_2) = c_P(\tau T_1 - \lambda T_1)$$

et ainsi

$$q_c = c_P(\tau - \lambda)T_1.$$

Enfin, dans la turbine, compte tenu de la convention d'algébrisation choisie pour w_T ,

$$h_4 - h_3 = -w_T + \underbrace{q_{34}}_{=0} \quad \text{donc} \quad w_T = h_3 - h_4 = c_P(T_3 - T_4) = c_P\left(\tau T_1 - \frac{\tau}{\lambda} T_1\right)$$

et ainsi

$$w_T = c_P\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\tau T_1.$$

4 Compte tenu du fonctionnement du dispositif,

$$w_T = w_a + w_c \quad \text{donc} \quad w_a = w_T - w_c$$

et d'après les questions qui précèdent

$$w_a = c_P\left[\tau - \frac{\tau}{\lambda} - \lambda + 1\right] T_1.$$

5 D'après les questions précédentes,

$$\mathcal{R} = \frac{w_a}{w_c} = \frac{w_T - w_c}{w_c} = \frac{w_T}{w_c} - 1.$$

Avec ce qui précède,

$$\mathcal{R} = \frac{\tau}{\lambda} - 1 \simeq 1,4.$$

Cela signifie que le compresseur et l'alternateur consomment environ chacun la moitié de l'énergie fournie par les gaz à la turbine ... alors que le but est de transmettre le maximum d'énergie à l'alternateur. Pour l'améliorer, il faut augmenter τ et diminuer λ . Comme T_1 et P_1 sont fixées (air atmosphérique), il faut diminuer la pression en sortie du compresseur et augmenter la température en sortie de la chambre de combustion, ce qui revient à fournir une énergie thermique de combustion plus élevée aux gaz. Cela pourrait être possible en augmentant la fraction de méthane au sein du mélange gazeux ... mais il faudrait s'assurer que cela n'affecte pas le rendement, ce que notre modèle simplifié ne peut pas prévoir.

6 Le rendement est le rapport entre l'énergie utile produite au cours du cycle, ici le travail $w_a > 0$ fourni à l'alternateur, et l'énergie coûteuse dépensée, ici la chaleur de combustion $q_c > 0$:

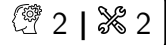
$$\eta = \frac{w_a}{q_c}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{c_P\left[\tau - \frac{\tau}{\lambda} - \lambda + 1\right] T_1}{c_P(\tau - \lambda)T_1} \\ &= \frac{\tau - \lambda - \frac{\tau}{\lambda} + 1}{\tau - \lambda} \\ &= \frac{\tau - \lambda}{\tau - \lambda} - \frac{1}{\lambda} \frac{\tau - \lambda}{\tau - \lambda} \\ \eta &= 1 - \frac{1}{\lambda} = 0,48. \end{aligned}$$

Attention, tout le travail w_T n'est pas du travail utile : on ne récupère pas sous forme électrique la fraction fournie au compresseur ... mais en revanche le travail w_c n'est pas de l'énergie coûteuse, puisqu'il s'agit d'un échange interne à la machine. Compte tenu de la structure de l'installation, il n'y a pas d'apport extérieur d'énergie au niveau du compresseur.

Exercice 5 : Compresseur étagé



- Premier principe industriel ;
- Modèle du gaz parfait.

- 1 La compression est adiabatique réversible : on applique donc la loi de Laplace, sous la forme $P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte}$. Ainsi,

$$T_2 = T_0 \beta^{1-1/\gamma} = 685 \text{ K}.$$

- 2 La compression est adiabatique, réversible et on néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle. D'après le premier principe entre la sortie et l'entrée du compresseur,

$$\Delta h = w + 0$$

Comme le fluide est un gaz parfait, on a d'après la loi de Joule $\Delta h = c_p \Delta T$ d'où

$$w = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} (T_2 - T_0),$$

et en reprenant la question précédente on obtient le résultat voulu,

$$w = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} T_0 \left(\beta^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right) = 412 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

- 3 Comme un échangeur ne contient pas de parties mobiles, le travail w' est la somme des travaux reçus dans les étages basse et haute pression.

$$w' = w_{BP} + 0 + w_{HP} = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} (T_1 - T_0) + \frac{\gamma r}{\gamma - 1} (T'_2 - T_0) \quad \text{d'où} \quad w' = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} (T_1 + T'_2 - 2T_0).$$

D'après la loi de Laplace appliqué aux isentropiques qui partent de la même température T_0 ,

$$T_1 = T_0 \beta_1^{(\gamma-1)/\gamma} \quad \text{et} \quad T'_2 = T_0 \beta_2^{(\gamma-1)/\gamma}$$

ce qui donne bien

$$w' = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} T_0 \left(\beta_1^{(\gamma-1)/\gamma} + \beta_2^{(\gamma-1)/\gamma} - 2 \right).$$

- 4 Posons $k = (\gamma - 1)/\gamma$. La recherche du minimum se résume à calculer

$$\frac{d}{dP_1} \left[\left(\frac{P_1}{P_0} \right)^k + \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^k \right] = k \frac{P_1^{k-1}}{P_0^k} - \frac{k P_2^k}{P_1^{k+1}}$$

Cette dérivée est nulle pour

$$P_1^{(k-1)+(k+1)} = (P_0 P_2)^k \quad \text{soit} \quad P_1^{2k} = (P_0 P_2)^k$$

ce qui donne bien la condition

$$P_1 = \sqrt{P_0 P_2}.$$

Lorsque $P_1 = \sqrt{P_0 P_2}$,

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{P_0 P_2}}{P_0} = \sqrt{\frac{P_2}{P_0}} = 5 \quad \text{et} \quad \beta_2 = \frac{P_2}{\sqrt{P_0 P_2}} = \sqrt{\frac{P_2}{P_0}} = 5.$$

5 En repartant de la loi de Laplace,

$$T'_2 = T_1 = \beta^{(\gamma-1)/\gamma} T_0 = 432 \text{ K}.$$

Cette température est donc nettement moins élevée (250 °C de différence !) que la température T_2 obtenue en sortie du compresseur mono-étagé.

6 On déduit de ce qui précède

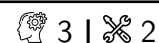
$$w' = \frac{2\gamma r}{\gamma - 1} (T'_2 - T_0) = 319 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1},$$

ce qui représente un gain d'environ 25 % par rapport au compresseur mono-étagé. En plus de permettre des températures moins élevées, l'utilisation de compresseurs étagés est également plus économique.

Le choix d'un compresseur simple ou étagé relève bien sûr de la complexité de l'installation ... mais aussi du rôle dévolu au compresseur. Par exemple, dans une pompe à chaleur ou un réfrigérateur, le compresseur a pour rôle d'augmenter la température du fluide bien plus que d'augmenter sa pression. Ainsi, dans ces installations, remplacer un compresseur simple par un compresseur étagé est évidemment une mauvaise idée !

Problème ouvert

Exercice 6 : Coût de fonctionnement d'un frigo



► Problème ouvert.

Supposons que les bouteilles de jus de fruit sont à température initiale $T_I = 25^\circ\text{C}$, et que la température finale (celle du frigo) vaut $T_F = 5^\circ\text{C}$. Commençons par calculer l'énergie nécessaire au refroidissement.

- Système : contenu du frigo.
- Bilan des échanges énergétiques :
 - transfert thermique reçu de la part du fluide frigorigène : $Q_{\text{frigo}} < 0$ que l'on cherche à déterminer ;
 - transfert thermique de fuite : $Q_{\text{fuite}} = +\mathcal{P}_{\text{fuite}} \Delta t > 0$ avec $\mathcal{P}_{\text{fuite}} = 10 \text{ W}$ et $\Delta t = 1 \text{ h} = 3,6 \cdot 10^3 \text{ s}$ (attention au signe : c'est le contenu du frigo qui reçoit réellement de l'énergie).
- Bilan d'enthalpie : on assimile le jus de fruit à de l'eau du point de vue thermique.

$$\Delta H = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{Q_{\text{frigo}}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{modèle}}}{Q_{\text{fuite}}} = m_{\text{jus}} c_{\text{eau}} (T_F - T_I)$$

où $m_{\text{jus}} = 6 \text{ kg}$. On en déduit

$$Q_{\text{frigo}} = m_{\text{jus}} c_{\text{eau}} (T_F - T_I) - \mathcal{P}_{\text{fuite}} \Delta t = -5,4 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

Calculons maintenant le coût en énergie électrique du refroidissement. On fait l'hypothèse que l'énergie électrique fournie au frigo ne sert qu'à faire tourner le compresseur. Par définition de l'efficacité d'un frigo, $e = |Q_{\text{froid}}/W|$ où les échanges énergétiques sont ceux du fluide. Ici, on a donc $e = |Q_{\text{frigo}}|/W_{\text{elec}}$. Ainsi,

$$W_{\text{elec}} = \frac{|Q_{\text{frigo}}|}{e} = 3,6 \cdot 10^5 \text{ J}.$$

Enfin, calculons le prix en euros de cette énergie, sachant que $1 \text{ kWh} = 1 \cdot 10^3 \text{ W} \times 3,6 \cdot 10^3 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$. On trouve

$$p = \frac{3,6 \cdot 10^5 \text{ J}}{3,6 \cdot 10^6 \text{ J}} \times 0,2 \text{ €} \simeq 2 \text{ centimes}.$$